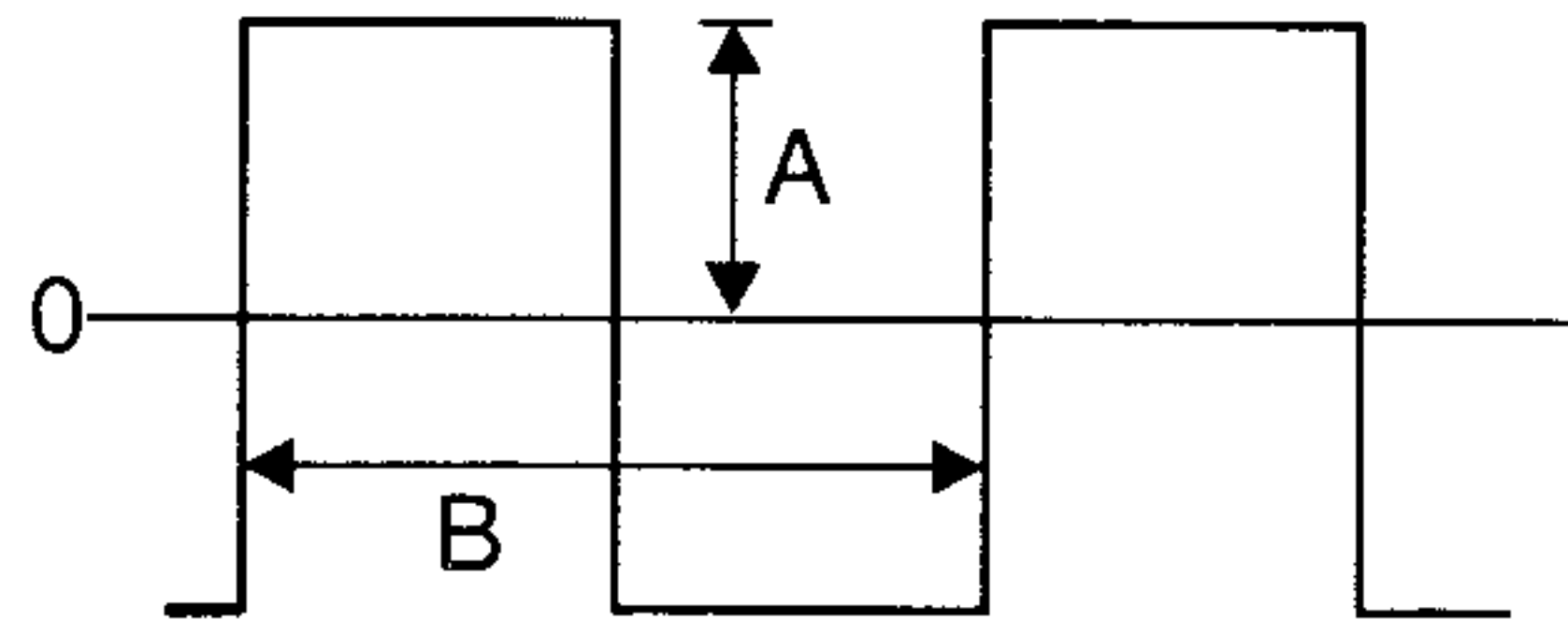


4. WISSELSTROOMTHEORIE

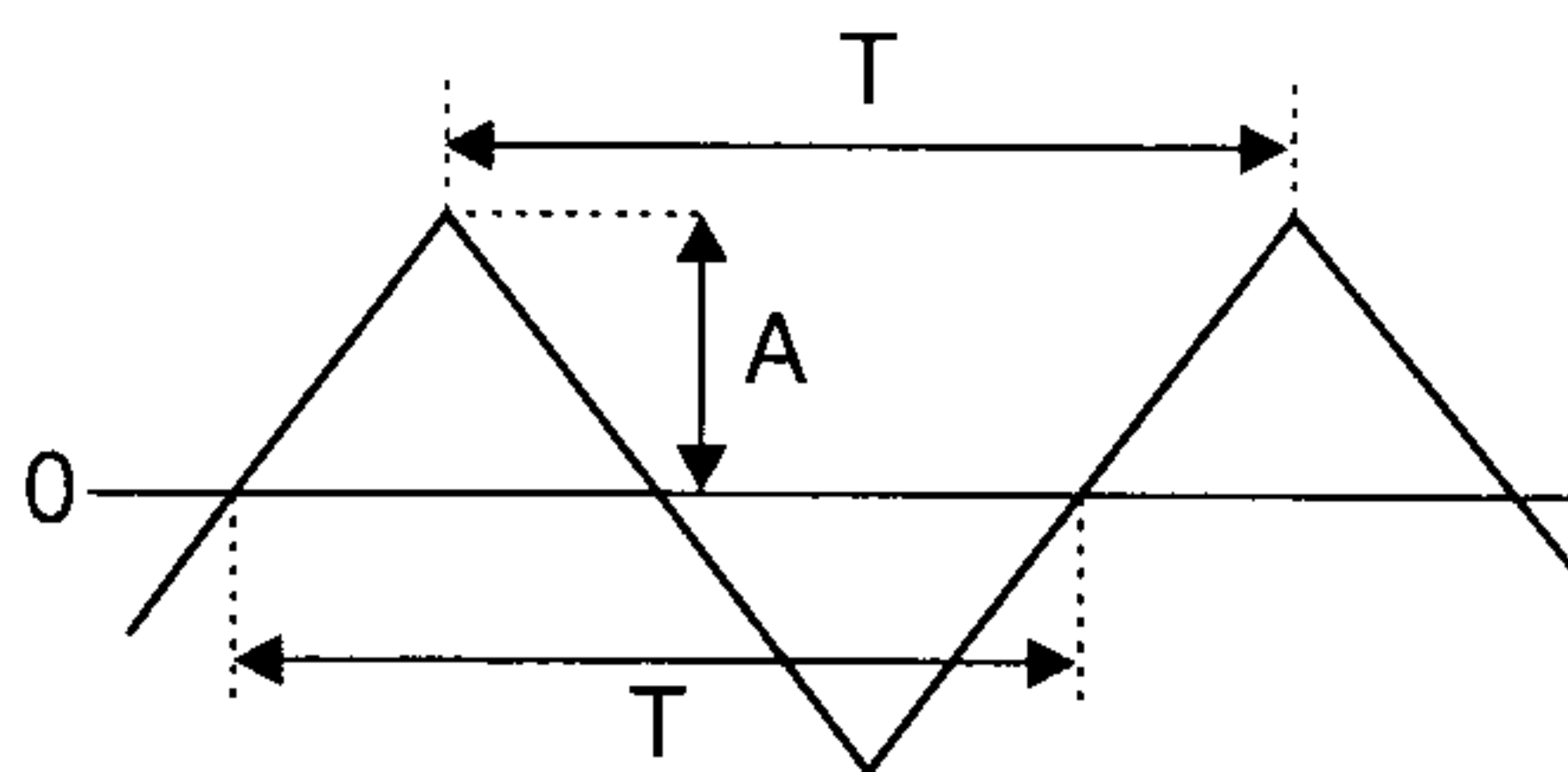
4.1 Periodieke verschijnselen

Inleiding

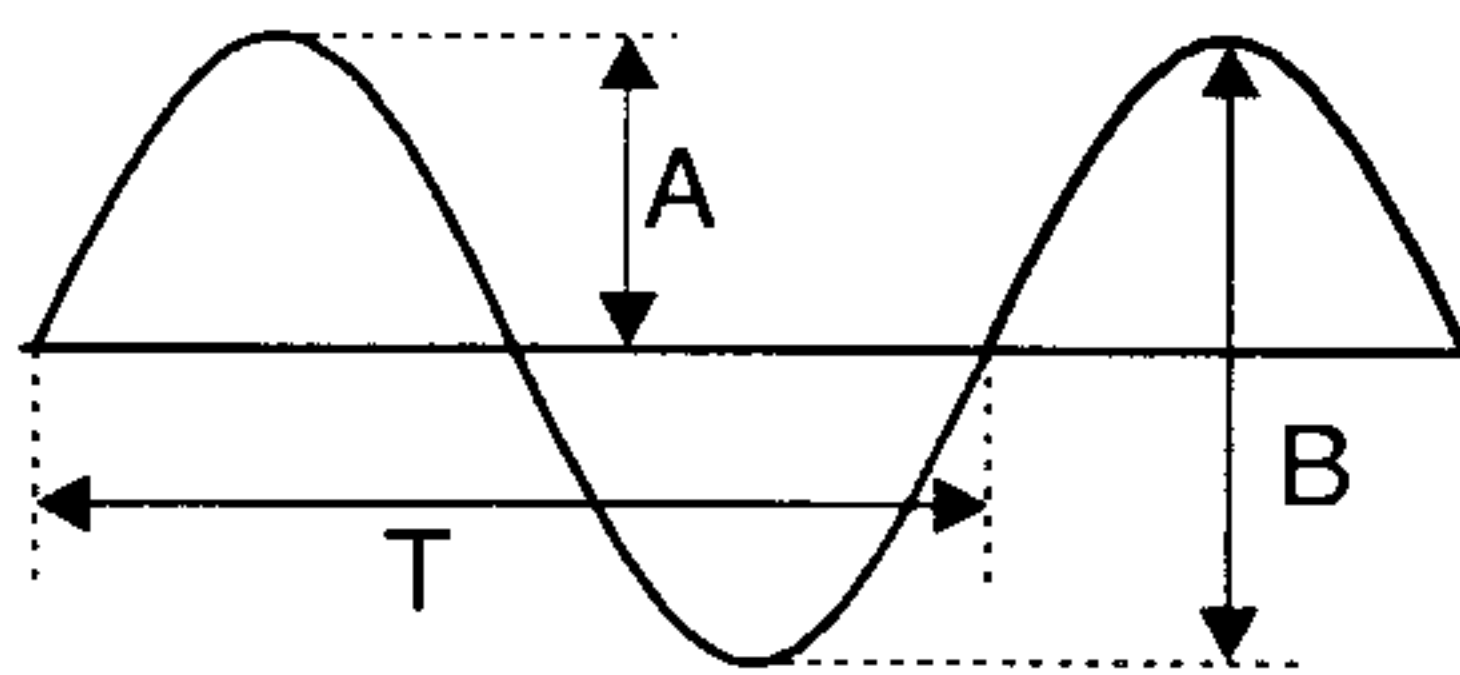
In dit hoofdstuk zullen we ons bezighouden met de eigenschappen van bepaalde wisselstroomvormen, zoals de blok-, de driehoek-, de sinus- en de zaagtandvorm (zie figuur 4.1-1).



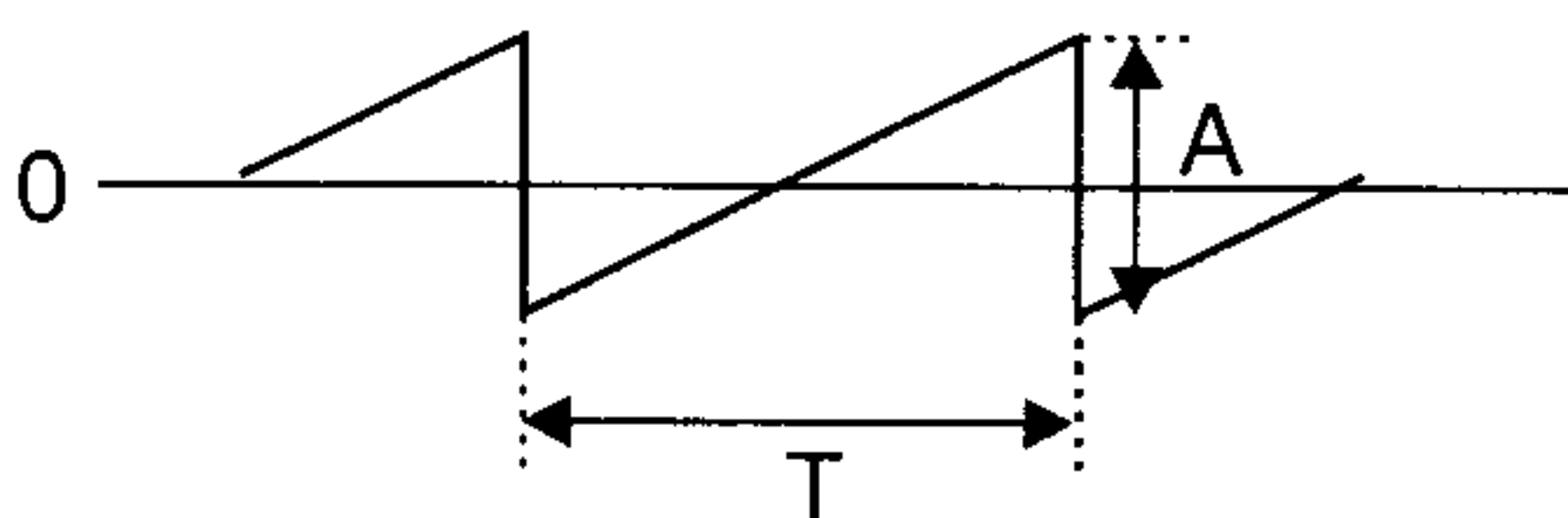
Figuur 4.1-1a Een blokvormige spanning



Figuur 4.1-1b Een driehoekvormige spanning



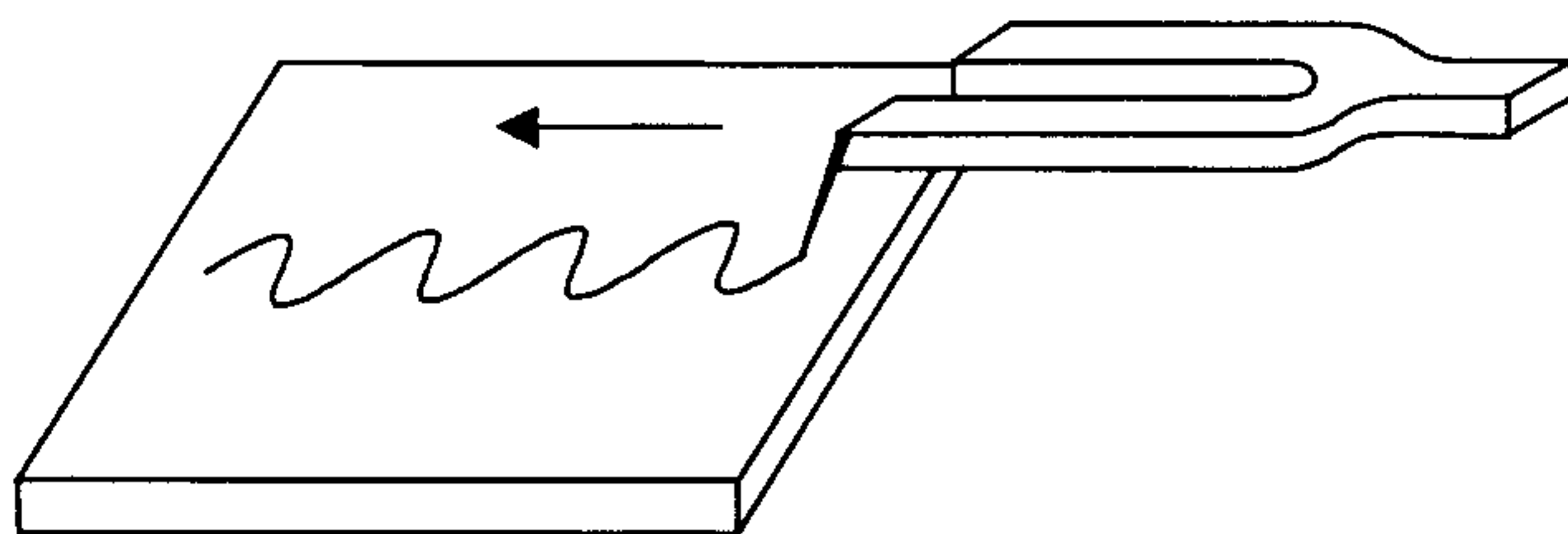
Figuur 4.1-1c Een sinusvormige spanning



Figuur 4.1-1d Een zaagtandvormige spanning

De meeste van die eigenschappen gelden zowel voor de wisselspanningsvormen als voor de wisselstroomvormen. In figuur 4.1-1 zijn enkele signaalvormen getekend. De blokspanning (figuur 4.1-1a) zouden we kunnen opwekken door de aansluitingen van een batterij met een dubbelpolige schakelaar voortdurend om te keren. Zetten we deze blokspanning op een spoel, dan gaat er de driehoekvormige stroom lopen, die in figuur 4.1-1b is getekend. De zaagtandvormige stroom (figuur 4.1-1d)

wordt in elk TV-toestel toegepast om de elektronenstraal gelijkmatig van links naar rechts over het scherm van de beeldbuis te laten lopen. De meeste aandacht zullen we aan de sinusvorm (figuur 4.1-1c) besteden. Deze signaalvorm speelt in de hele natuurkunde een belangrijke rol. Zo voeren bijvoorbeeld een trillende stemvork (figuur 4.1-2), de slinger van een klok en een aan een veer opgehangen gewicht (bij benadering) een sinusvormige beweging uit.



Figuur 4.1-2 De trillende stemvork voert een sinusvormige beweging uit. Deze wordt door een pen op het bewegende plaatje getekend.

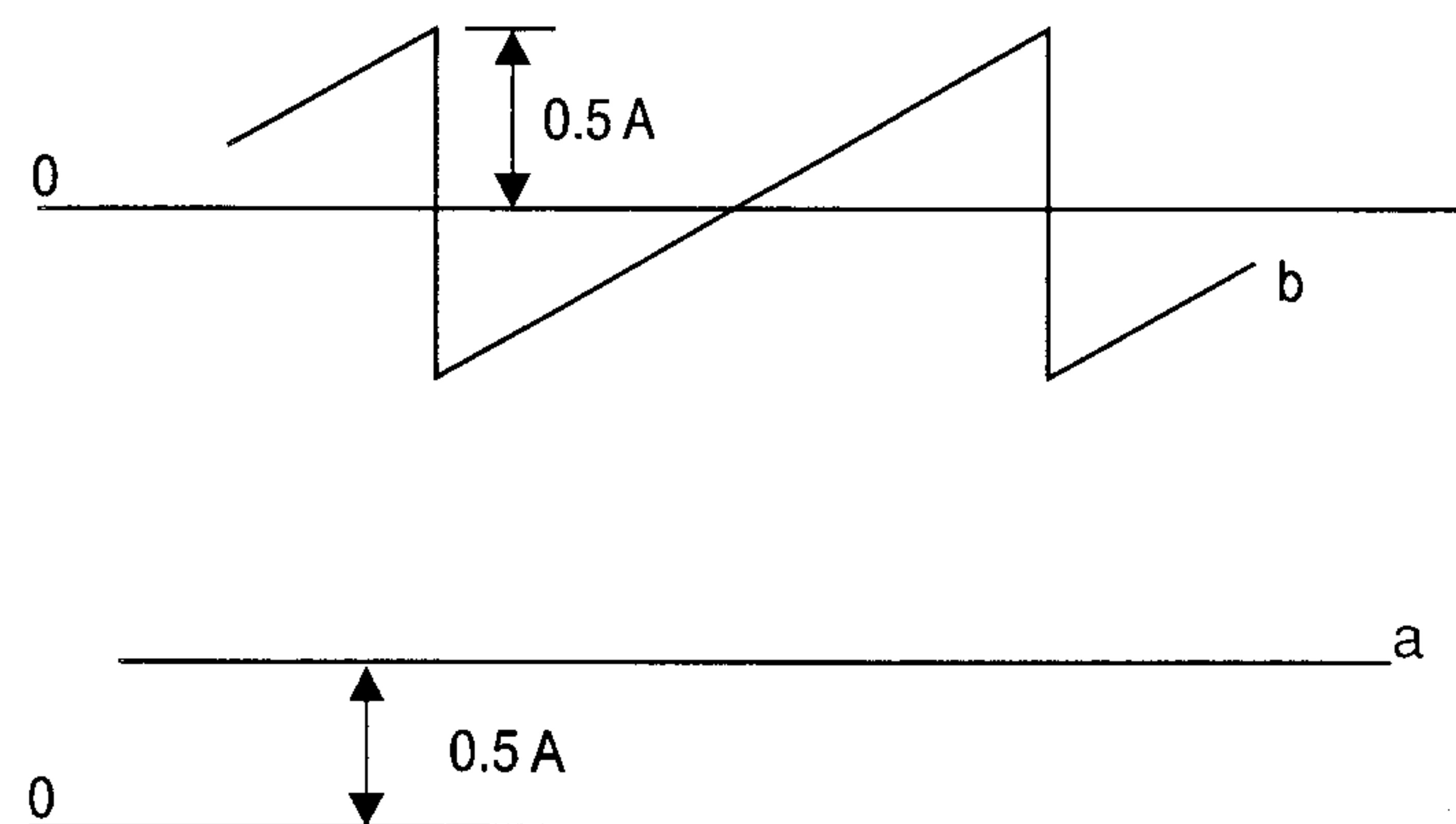
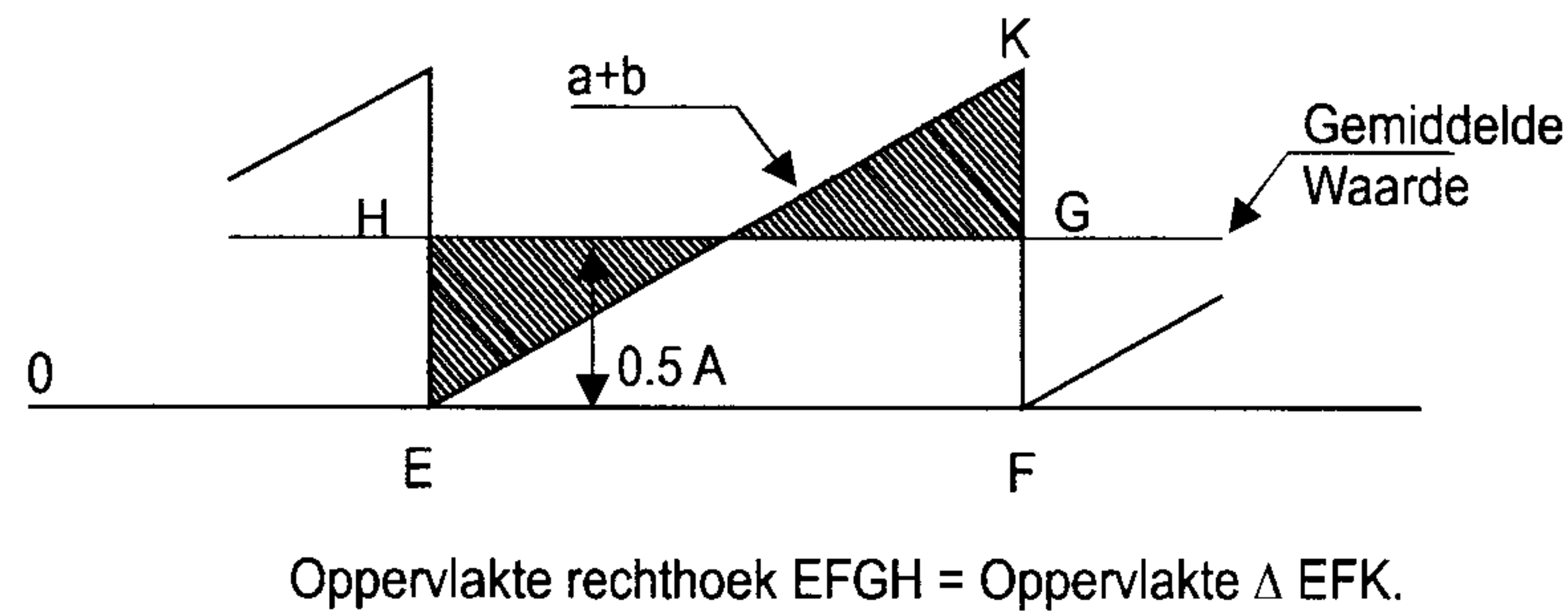
Enkele begrippen

We spreken van een periodiek signaal wanneer er een bepaalde (kleinste) tijd bestaat, waarna het verschijnsel zich op precies dezelfde wijze herhaalt: de zogenaamde periodetijd (T). We spreken van wisselstroom, als de richting waarin de elektronen vloeien, voortdurend omkeert. De grafiek van een wisselstroom stroom verloopt zowel boven als onder de nul-as. Strikt genomen is de zaagtand in figuur 4.1-1d geen wisselstroom, daar de grafiek niet onder de nul-as komt. Deze grafiek is op te vatten als de som van een wisselstroom plus een gelijkstroom die het geheel boven de nul-as tilt (zie figuur 4.1-3). Om de periodetijd te bepalen meten we meestal de tijd tussen twee gelijksoortige nuldoorgangen, maar bij de figuur 4.1-1b tot en met 4.1-1d zouden we net zo goed de tijd tussen twee toppen kunnen meten. Stel eens dat de periodetijd van een stroom 0,05 s is. Hoeveel perioden worden dan in 1 seconde uitgevoerd? Dat lijkt veel op de vraag hoeveel stuivers er in een gulden gaan, namelijk:

$$\frac{1}{0,05} = 20.$$

Het aantal perioden per seconde noemen we de frequentie (f). De frequentie wordt uitgedrukt in de eenheid hertz, (Hz). Hoe meer perioden per seconde, des te korter zal de tijdsduur van één periode zijn. Kennelijk geldt het verband:

$$f = \frac{1}{T} \quad (1)$$



Figuur 4.1-3 De zaagtand wordt verkregen door een gelijkstroom met een amplitude van $0.5 A$ (lijn a) bij de wisselstroom van lijn b op te tellen.

Bij de figuren 4.1-1b t/m 4.1-1d zien we dat de waarde van de stroom voortdurend verandert. De mededeling dat de stroom op een bepaald moment (de zogenaamde momentele waarde) $3 A$ is geeft dus niet zoveel houvast. In de elektronica geven we vaak de maximale waarde van de sinus op. We spreken dan van de amplitude of topwaarde. Soms geven we de afstand tussen het positieve en negatieve maximum, de zogenaamde toptopwaarde (figuur 4.1-1c, pijl B).

Het laatste begrip dat we hier bespreken is de fase. Daarmee geven we eigenlijk aan waar we ons in de grafiek van een periodiek signaal bevinden. Aangezien we met het verstrijken van de tijd steeds in een ander punt komen, verandert de fase voortdurend. Veel belangrijker dan deze absolute fase is het faseverschil tussen twee periodieke signalen met dezelfde frequentie. We spreken in dit verband van faseverschuiving.

In figuur 4.1-4a t/m 4.1-4c zijn enkele stromen getekend met een onderling faseverschil. Bij A vallen zowel de nuldoorgangen als de positieve en negatieve maxima samen: het faseverschil is nul. Men zegt dan: I_1 en I_2 zijn in fase. Bij B valt het positieve maximum van I_1 samen met het negatieve maximum van I_2 . Het faseverschil is hier een halve periode. Men zegt: I_1 en I_2 zijn in tegenfase. Bij C valt het maximum van I_1 samen met de nuldoorgang van I_2 . Het faseverschil is hier een kwart periode. Zoals we in de meetkunde een cirkelomtrek verdelen in 360 graden, zo kunnen we een periodiek signaal ook in 360° verdelen. Daardoor is het mogelijk de

faseverschuiving in graden op te geven. Bij B en C bedraagt de faseverschuiving respectievelijk 180° en 90° .

Kennis van de faseverschuiving tussen twee stromen is van belang wanneer we de resulterende stroomsterkte ervan moeten berekenen. Als de stromen in fase zijn, geldt:

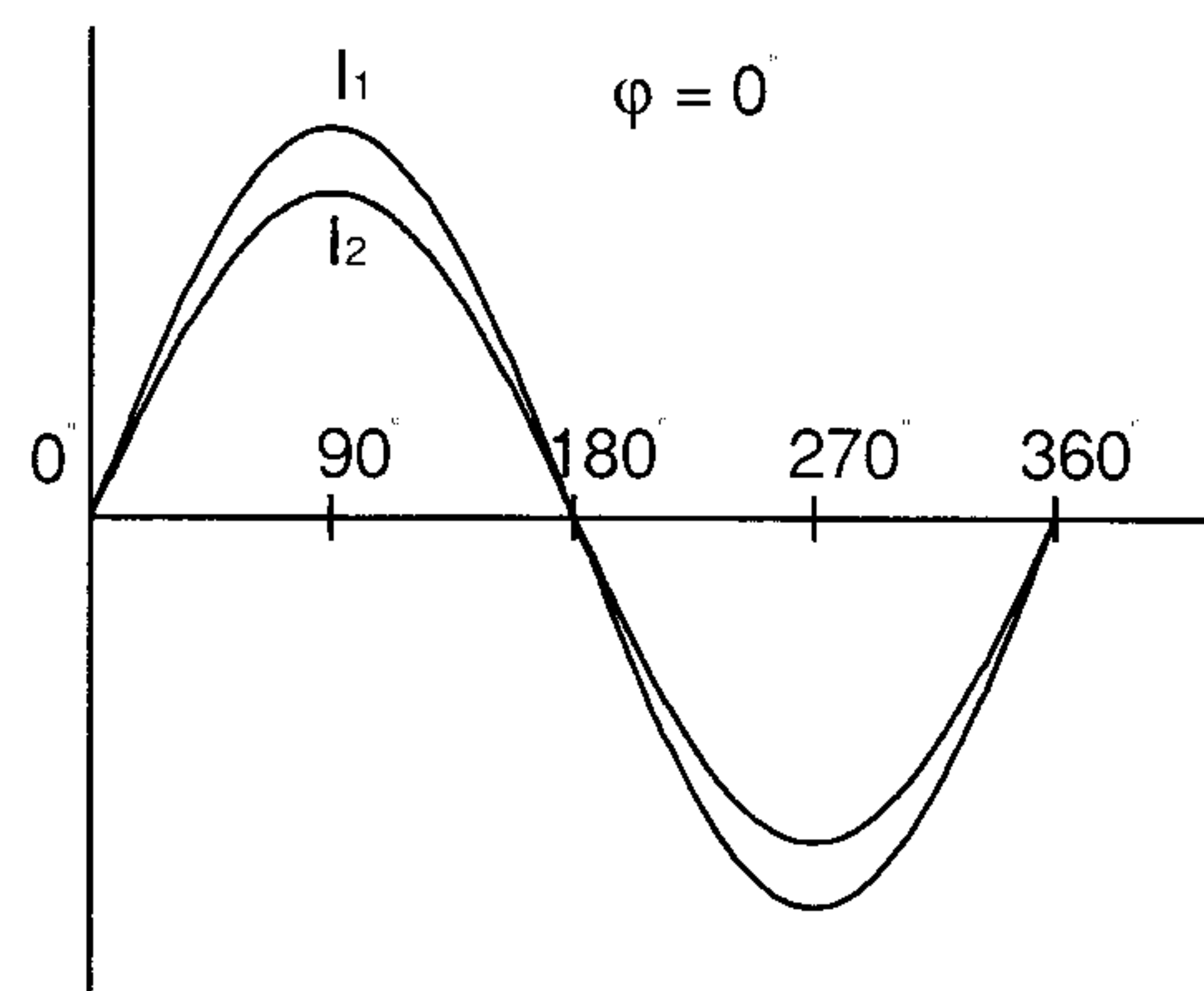
$$I_{\text{totaal}} = I_1 + I_2 \quad (\text{formule 2})$$

Dit is precies hetzelfde als bij gelijkstroom. Wanneer het faseverschil echter 180° bedraagt, werken de stromen elkaar tegen.

In dat geval geldt:

$$I_{\text{totaal}} = I_1 - I_2 \quad (\text{formule 3})$$

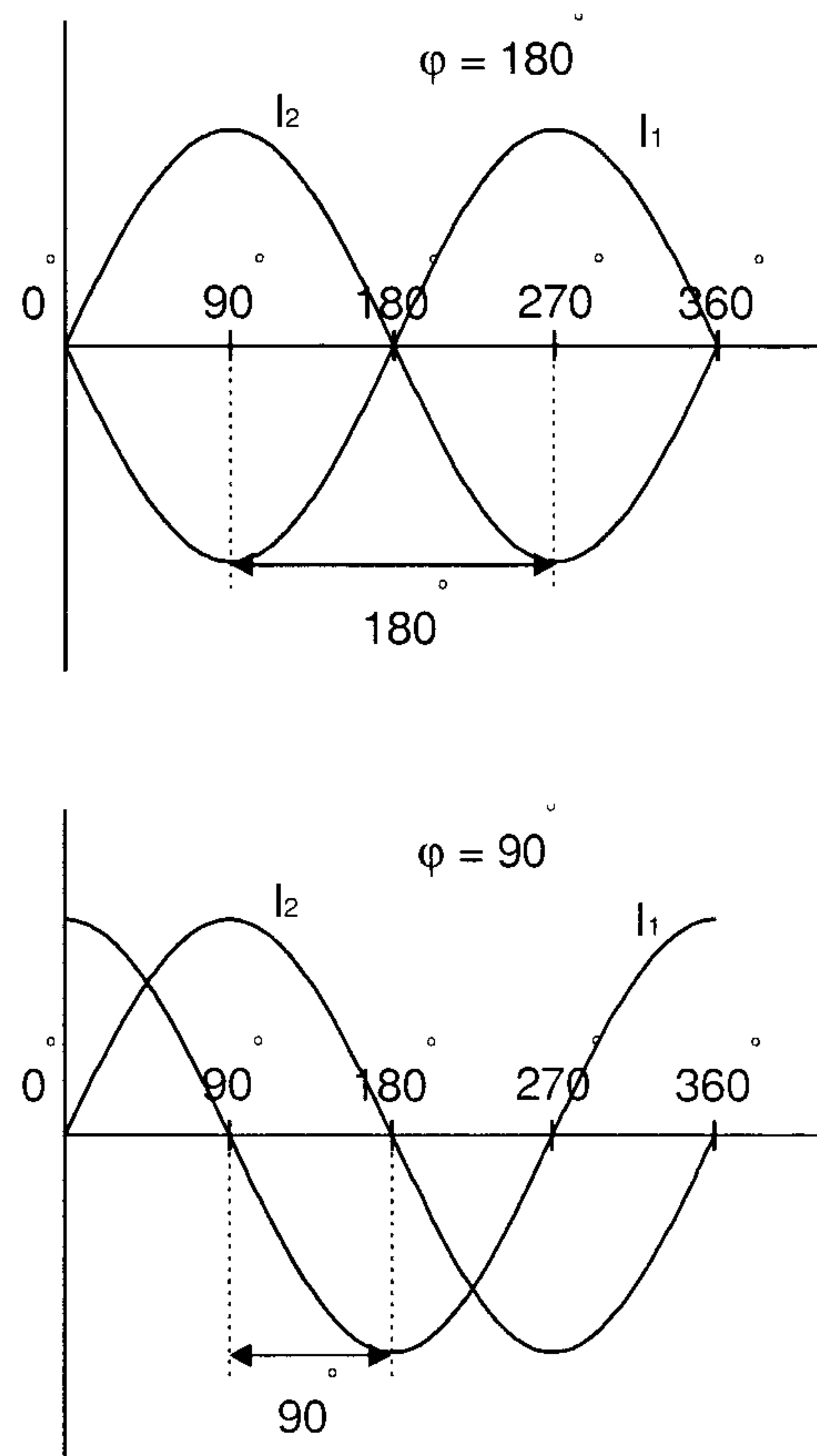
Bij een willekeurige faseverschuiving zal de resulterende stroomsterkte ergens tussen het antwoord van formule 2 en formule 3 liggen. In paragraaf 4.3. zullen we zien hoe we stromen met een willekeurig faseverschil kunnen optellen.



Figuur 4.1-4a. Twee sinusgolven, zonder faseverschil.

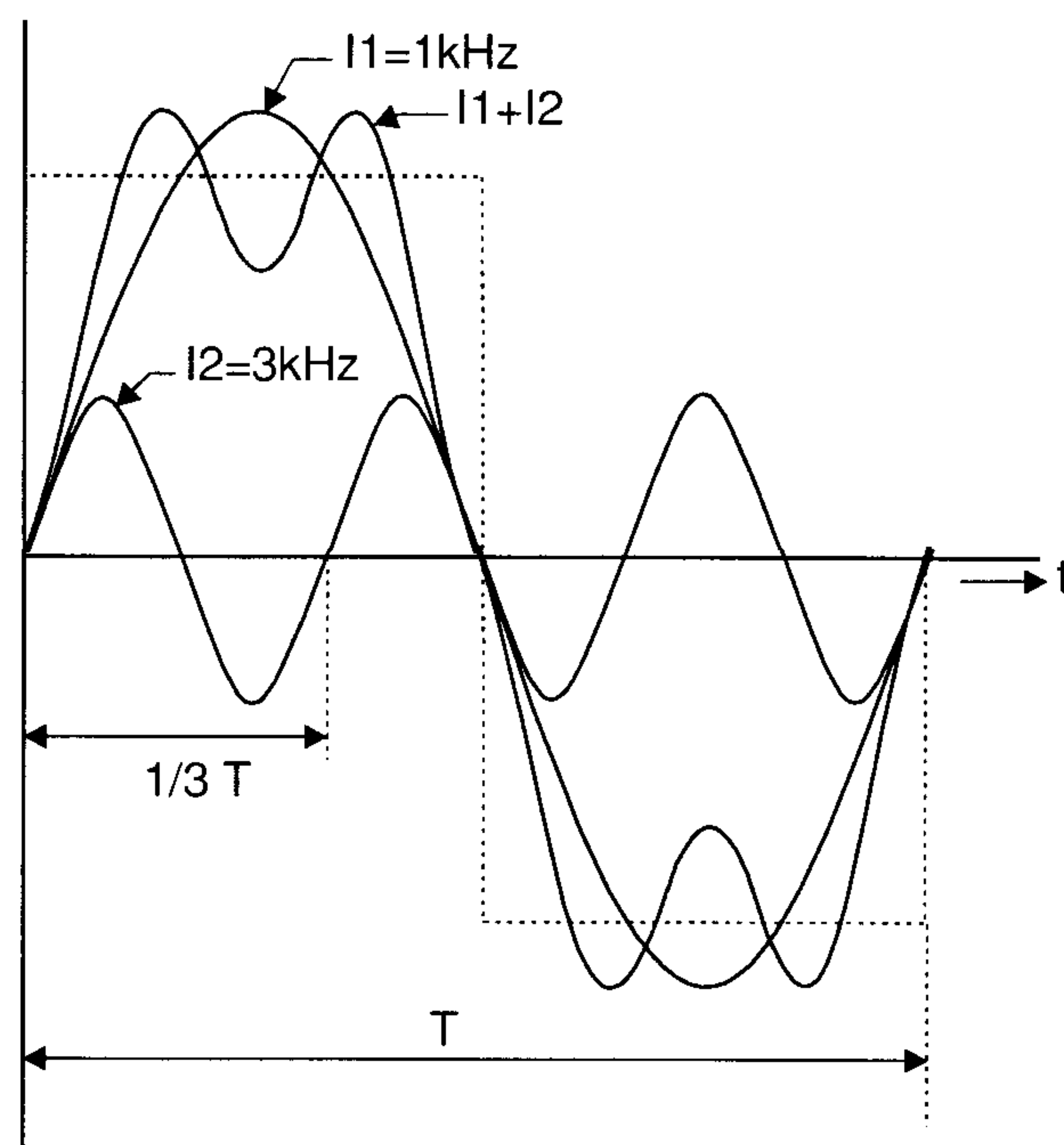
Harmonischen

Wanneer we de sinuslijn vergelijken met de andere stroomvormen in figuur 4.1-1 vinden we misschien dat deze grafiek er nogal typisch uitziet. Waarom is nu juist deze vorm zo belangrijk in de elektrotechniek? De sinusvorm is enkelvoudig, er zit maar één frequentie in. Bij de andere signaalvormen is dat niet zo. De Franse wiskundige Fourier heeft bewezen, dat men iedere periodieke stroom kan ontleden in een aantal sinusvormige stromen, welke opgeteld de oorspronkelijke stroom vormen. De frequenties van de samenstellende stromen zijn altijd veelvouden van de grondfrequentie. Neem eens aan dat van de blokgolf in figuur 4.1-1a een periodetijd van $T = 1 \text{ ms}$ heeft. De frequentie is dan 1 kHz .



Figuur 4.1-4b Enkele stromen met onderlinge faseverschuiving

In dit signaal is een sinus aanwezig met een frequentie van 1 kHz. Dit noemen we de grondfrequentie of eerste harmonische. Er zitten echter ook sinussen in met de 3-, 5-, 7- en 9-voudige frequentie. In feite loopt die rij met zogenaamde hogere harmonischen tot in het oneindige door, maar de amplitude wordt steeds kleiner. In dit voorbeeld komen alleen de oneven harmonischen voor. Dat is zo bij alle symmetrische golfvormen. In de asymmetrische zaagtand zitten ook even harmonischen, dus signalen van 2, 4 en 6 kHz. (Er zijn stroomvormen welke alleen uit even harmonischen bestaan.) Het is ook mogelijk een blokgolf op te bouwen door de grondfrequentie en een aantal hogere harmonischen met de juiste amplitude en fase bij elkaar op te tellen. Figuur 4.1-5 laat dit zien voor de grondfrequentie en de derde harmonische. Naarmate we meer harmonischen toevoegen, wordt de benadering van de blokgolf beter. Voor ons zendateurs is het belangrijk hiervan kennis te hebben: Als het signaal van onze zender ook maar het geringste van de sinusvorm afwijkt zenden we op meerdere frequenties tegelijk uit!



Figuur 4.1-5 Een blokgolf is op te bouwen uit de grondfrequentie (hier 1 kHz) en vele hogere harmonischen. Alleen de derde harmonische is hier getekend. Hoe meer harmonischen we toevoegen, des te beter wordt de benadering.

De gemiddelde waarde

Bij de zaagtand hebben we al opgemerkt dat in deze stroomvorm een gelijkstroom is verscholen. We spreken dan over de gemiddelde waarde van de stroom. Daaronder verstaan we de sterkte van een gelijkstroom die in een bepaalde tijd (meestal een hele of een halve periode) dezelfde lading verplaatst als de beschouwde wisselstroom. Wiskundig is te bewijzen dat de verplaatste lading evenredig is met het oppervlak dat de grafiek van die stroom met de nul-as insluit. Bij de zaagtand is dat oppervlak gemakkelijk te berekenen. Voor een driehoek geldt:

$$\text{Oppervlak} = \frac{1}{2} \cdot \text{hoogte} \cdot \text{basis}$$

De basis is in ons geval T en de hoogte A . Het gaat er nu om een rechthoek te vinden die hetzelfde oppervlak heeft als de driehoek. Uiteraard is de basis van die rechthoek ook gelijk aan T . De hoogte EH van rechthoek $EFGH$ in figuur 4.1-3 stelt de gezochte gemiddelde waarde voor. Er geldt dus: oppervlak rechthoek = oppervlak driehoek, of:

$$EH \cdot T = \frac{1}{2} \cdot A \cdot T \text{ zodat: } EH = \frac{1}{2} \cdot A$$

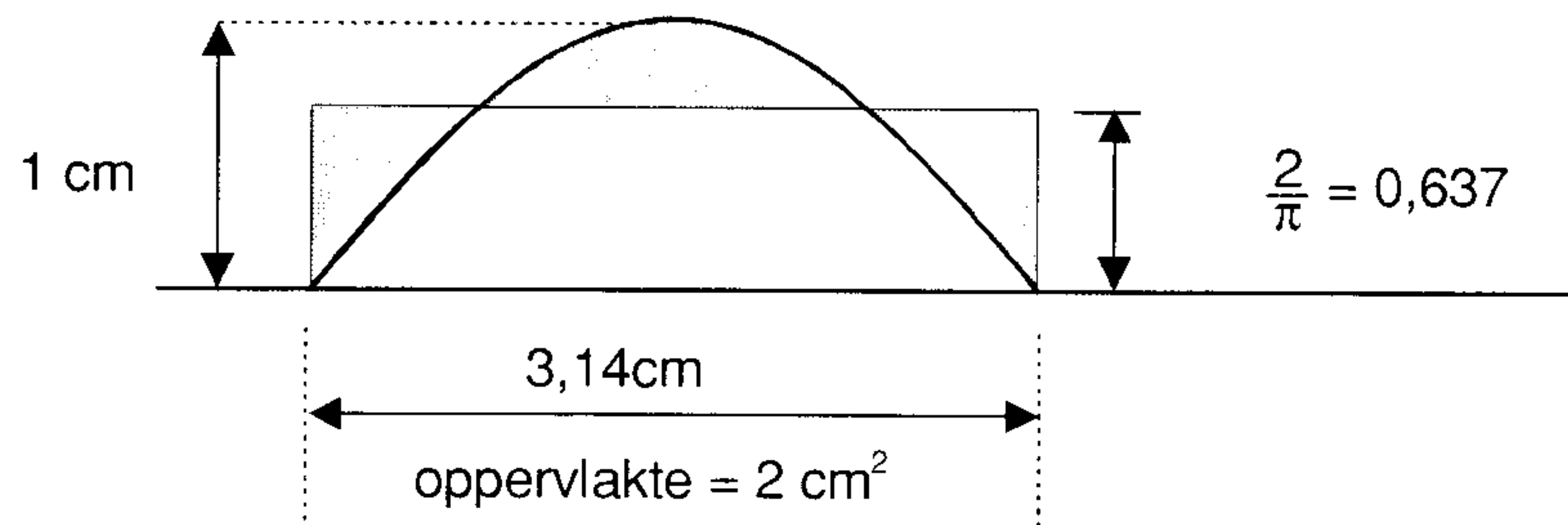
De gemiddelde waarde van een zaagtandvormige stroom is dus gelijk aan de helft van de amplitude. In formulevorm:

$$I_{gem} = \frac{1}{2} \cdot I_{max} \quad (\text{formule 4})$$

Bij de zuivere wisselstromen uit figuur 4.1-1a t/m 4.1-1c is de gemiddelde waarde, gerekend over een hele periode, gelijk aan nul. Er is immers evenveel positief oppervlak (boven de nul-as) als negatief oppervlak (onder de nul-as). Om toch een beeld van de verplaatste lading te krijgen berekent men het gemiddelde over een halve periode. Bij de blokvorm is dat erg eenvoudig: dat is al een rechthoek. Dus: $I_{gem} = I_{max}$. Bij de driehoek (figuur 4.1-1b) vinden we weer:

$$I_{gem} = \frac{1}{2} \cdot I_{max}$$

Bij de sinus ligt het wat moeilijker.



Figuur 4.1.6 Bepaling van de gemiddelde waarde van een halve sinus. Het oppervlak van de rechthoek is gelijk aan de oppervlakte van de sinus. De hoogte van de rechthoek stelt de gemiddelde waarde van de sinus voor ($2/\pi$)

Daarom is in figuur 4.1-6 een halve periode getekend zoals het eigenlijk hoort: dus met een amplitude van 1 cm en een halve periode van π cm (voor de duidelijkheid is figuur 4.1-6 1,4 maal zo groot getekend).

Men kan bewijzen dat het oppervlak, dat de sinuslijn met de nul-as, insluit dan exact 2 cm^2 bedraagt. De hoogte van de rechthoek wordt dan:

$$H = \frac{\text{Opp.Sinus}}{\text{Basis}} = \frac{2}{\pi} = 0,637 \text{ cm}$$

Voor een sinusvormige stroom geldt dus:

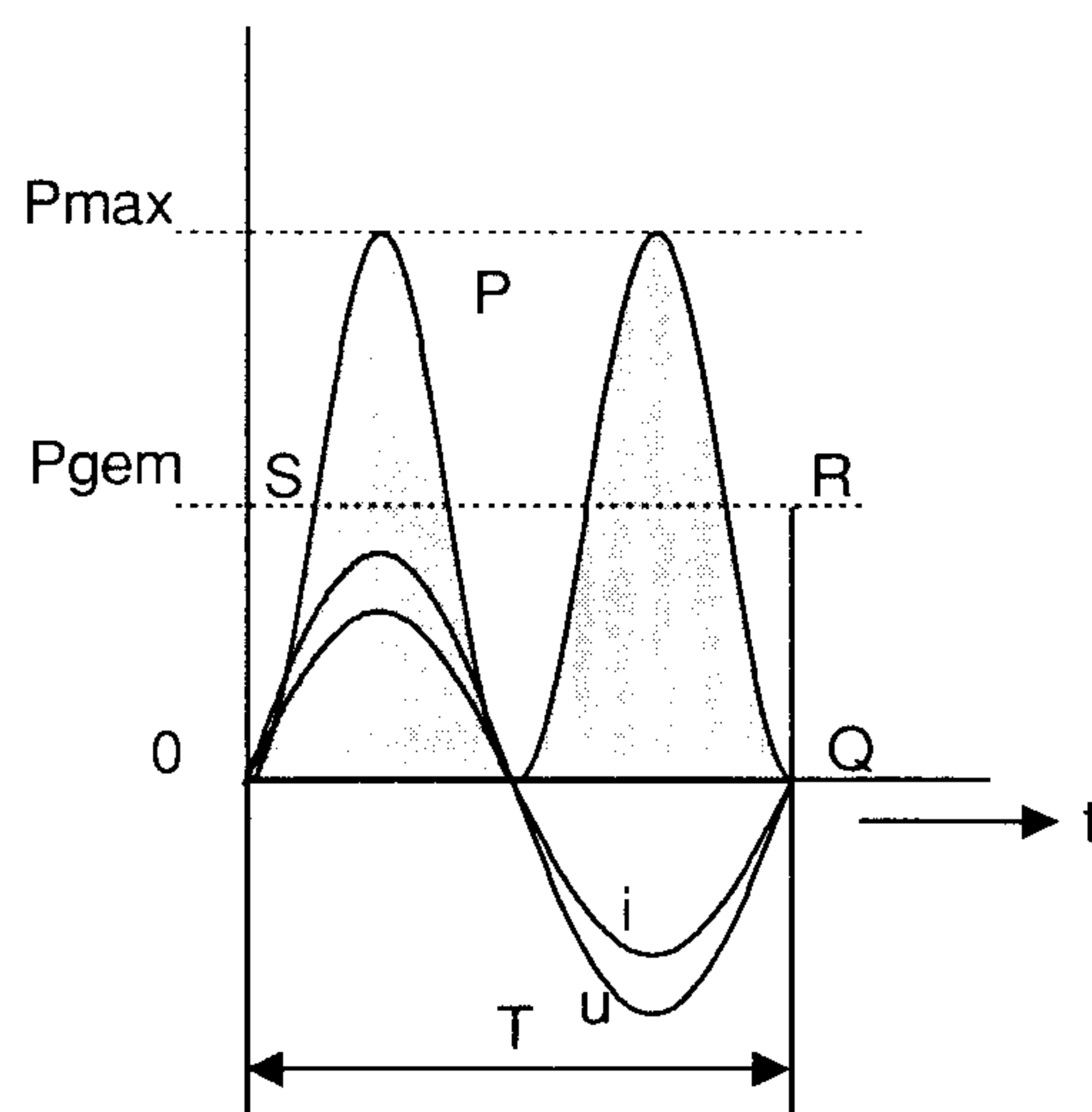
$$I_{gem} = 0,637 \cdot I_{max} \quad (\text{formule 5})$$

De effectieve waarde van een sinusvormige stroom

Onder de effectieve waarde van een wisselstroom verstaat men de sterkte van de gelijkstroom die in een weerstand gedurende een bepaalde tijd dezelfde warmte ontwikkelt als de beschouwde wisselstroom. De effectieve waarde is dus een maat voor het geleverde *vermogen*. Uit de gelijkstroomtheorie weten we nog dat:

$$P = U \cdot I$$

Zolang U en I niet veranderen (gelijkstroom) is er niets aan de hand, maar bij wisselstroom veranderen U en I voortdurend. Om een beeld te krijgen van het geleverde vermogen voeren we het rekensommetje $P = U \cdot I$ uit met een groot aantal momentele waarden. De uitkomsten van die berekening werden in figuur 4.1-7 grafisch uitgezet. De vermogensgrafiek is weer een sinuslijn, maar thans met de dubbele frequentie. Bovendien ligt hij geheel boven de nul-as.



Figuur 4.1.7

Dat is logisch, want wanneer we een negatieve U met een negatieve I vermenigvuldigen is de uitkomst positief (min · min = plus). Om het gemiddelde vermogen te bepalen moeten we een rechthoek tekenen die hetzelfde oppervlak heeft als de vermogensgrafiek, gerekend over één periode. Op grond van de symmetrie van de sinuslijn zal de hoogte van de rechthoek OQRS in figuur 4.1-7 gelijk zijn aan de helft van het maximum. Er ligt dan immers net zoveel oppervlak boven als onder de stippellijn SR, dus:

$$P_{gem} = \frac{1}{2} \cdot P_{max} \text{ of}$$

$$P_{gem} = \frac{1}{2} \cdot U_{max} \cdot I_{max} \quad (\text{formule 6})$$

We gaan nu een zodanige maat voor U en I invoeren, dat de factor 0,5 in formule 6 verdwijnt. Het ligt voor de hand om deze factor gelijk over U en I te verdelen, aldus:

$$0,5 = 0,707 \cdot 0,707$$

$$\text{(eigenlijk } \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{4} \cdot 2 = 0,5).$$

$$P_{gem} = 0,707 \cdot U_{max} \cdot 0,707 \cdot I_{max}$$

Men stelt nu:

$$U_{eff} = 0,707 \cdot U_{max} \quad \text{en} \quad \text{(formule 7)}$$

$$I_{eff} = 0,707 \cdot I_{max} \quad \text{zodat} \quad \text{(formule 8)}$$

$$P_{gem} = U_{eff} \cdot I_{eff} \quad \text{(formule 9)}$$

Het is gebruikelijk om de indices *gem* en *eff* in formule 9 weg te laten. Als er niets bij staat bedoelen we met *P* het gemiddelde vermogen en met *U* en *I* de effectieve waarde van spanning of stroom. Wanneer men zegt dat de spanning van het lichtnet 220 V bedraagt, dan wordt daarmee bedoeld: $U_{eff} = 220$ V. Hoe groot is dan de amplitude van dezelfde netspanning?

Uit formule 7 volgt:

$$U_{max} = \frac{U_{eff}}{0,707} = \frac{220}{0,707} = 311 \text{ V}$$

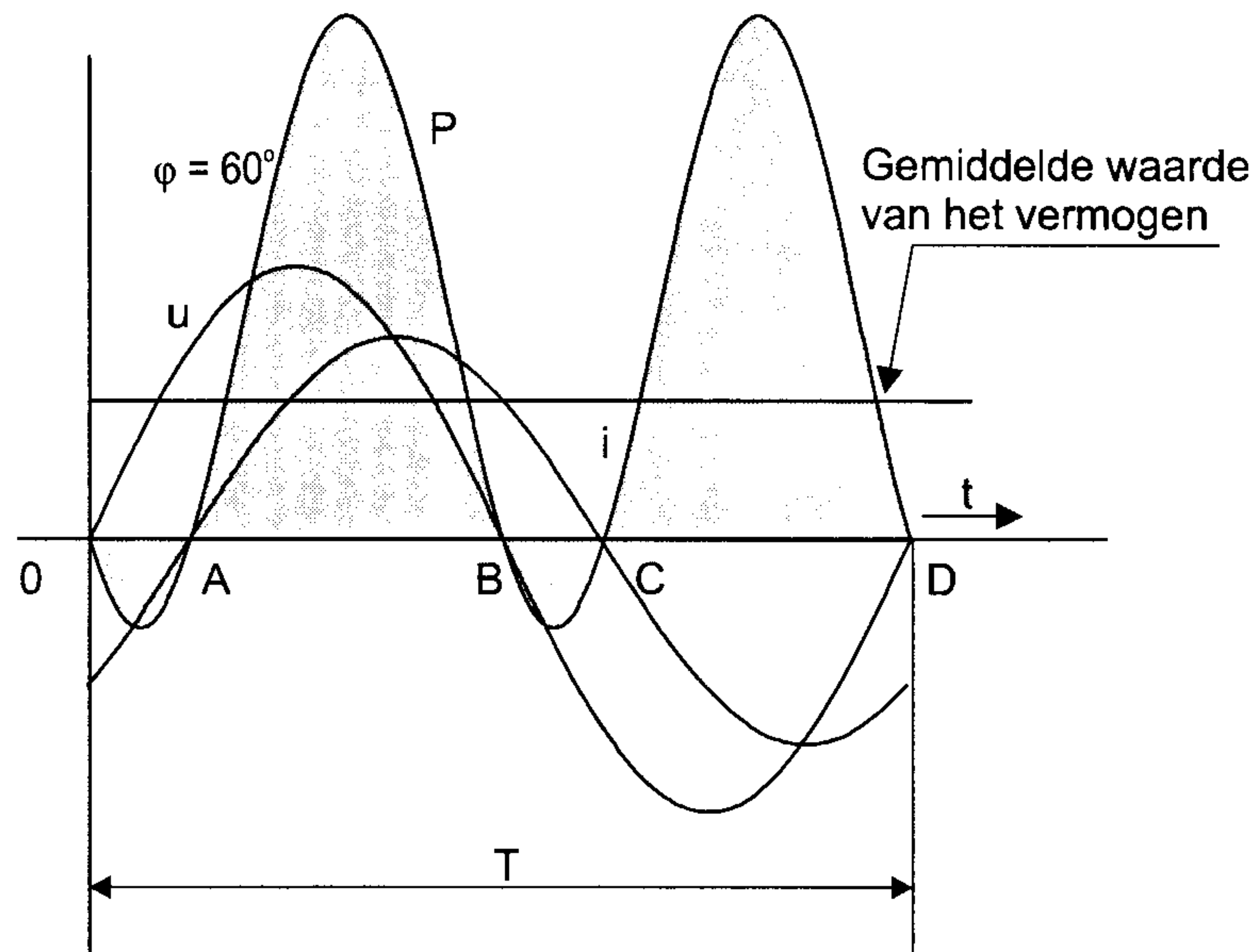
Samenvatting

Het begrip effectieve waarde is zo in elkaar gezet, dat we spanningen en stromen die hierin zijn uitgedrukt rustig kunnen invullen in formules van het type $P = U \cdot I$ of $P = I^2 \cdot R$. We vinden dan automatisch het gemiddelde vermogen. Dit verklaart meteen waarom we over effectieve waarde spreken. Een wisselspanning met een effectieve waarde van bijvoorbeeld 10 volt heeft namelijk het zelfde *effect* als een gelijkspanning met een waarde van 10 volt.

4.1.1 De arbeidsfactor $\cos \varphi$

In de vorige paragraaf zijn we er stilzwijgend van uitgegaan dat spanning en stroom in fase zijn. Zodra in een elektrisch netwerk spoelen of condensatoren voorkomen is dat in het algemeen niet meer het geval.

In figuur 4.1-8 zien we dat er gedurende het interval OA een negatieve stroom vloeit, terwijl de spanning positief is. Strikt genomen neemt de belasting hier negatief vermogen op. Dat betekent in de praktijk dat de belasting gedurende dat interval vermogen aan de generator teruglevert. Iets dergelijks gebeurt ook tijdens het interval BC. Nu is de spanning negatief terwijl de stroom nog positief is. Doordat de belasting gedurende enige tijd vermogen terug levert wordt het gemiddeld opgenomen vermogen natuurlijk kleiner.



Figuur 4.1.8 Gemiddeld vermogen bij een faseverschuiving van 60° . Door het ontstaan van negatief vermogen gedurende de intervallen OA en BC wordt het gemiddelde vermogen kleiner.

Figuur 4.1-9 geeft de toestand bij een zuivere spoel weer (geen weerstand). De faseverschuiving tussen U en I bedraagt dan 90° . We zien dat het positieve oppervlak van de vermogens grafiek gelijk is aan het negatieve oppervlak. Een zuivere spoel neemt gedurende een kwart periode vermogen op en levert dat in de volgende kwart periode geheel terug aan de generator. Gemiddeld over een hele periode neemt de spoel dus geen vermogen op. Iets dergelijks geldt ook voor een verliesvrije condensator. We mogen formule 9 daarom alleen toepassen als U en I in fase zijn. Wanneer dat niet zo is moeten we op de uitkomst van formule 9 een correctie toepassen. Die correctie noemt men de arbeidsfactor $\cos \phi$ (spreek uit: kosienus fie). De formule voor het vermogen wordt dan (zonder nader bewijs):

$$P = U \cdot I \cdot \cos \phi \quad (\text{formule 10})$$

Hierin stelt ϕ de faseverschuiving tussen U en I voor. Als U en I in fase zijn, dus $\phi = 0^\circ$, krijgen we formule 9 terug, immers $\cos 0 = 1$. Bij een verliesvrije spoel of condensator geldt $\phi = 90^\circ$. Daar $\cos 90 = 0$ levert formule 10 in dat geval altijd 0 op (een produkt is 0 als één van de factoren nul is).

4.1.2 Schijnbaar vermogen

Aan de borreltafel horen we soms het praatje dat men de aanwijzing van de kilowattuur (kWh) meter in de meterkast kan beïnvloeden door flinke spoelen of condensatoren op een stopcontact aan te sluiten. Nu is die kWh-meter in feite een analog computertje dat de afgenomen arbeid berekent volgens de formule:

$$W = U \cdot I \cdot \cos \phi \cdot t$$

Hierin stelt W (afkomstig van het Engelse woord work) de arbeid in Joule voor en t de tijd (in seconden) gedurende welke de belasting was aangesloten. Aangezien de $\cos \varphi$ van een verliesvrije spoel of condensator 0 is, heeft het aansluiten van een dergelijke belasting geen enkele invloed op de aanwijzing van de kWh-meter. Toch vindt het energiebedrijf dit soort experimenten niet leuk. Er vloeit immers wel degelijk stroom door de leidingen. Daarmee leggen we beslag op een deel van de transportcapaciteit van het lichtnet. We kunnen het vergelijken met een lokale verkeersweg waar, op een zonnige vakantiedag, vermaak zoekende personen, rondjes rijden. De huisarts die met spoed naar een patiënt moet kan er dan niet door, omdat de rondjes rijdende auto's de weg vol maken. Om het wat nauwkeuriger uit te drukken: de mate waarin we beslag leggen op de transportcapaciteit van het lichtnet (en dat geldt evenzeer voor een generator of transformator) wordt bepaald door het produkt $U \cdot I$. Men spreekt in dit verband van schijnbaar vermogen, dus:

$$P_{\text{schijnbaar}} = U \cdot I$$

De vraag is nu waarin we dit vermogen moeten uitdrukken, want de eenheid Watt is alleen van toepassing als U en I in fase zijn. Men gebruikt daarom de volt-ampère (VA). Om het wat duidelijker te maken volgen twee voorbeelden.

Voorbeeld 1

Op het capaciteitsplaatje van een stofzuiger is vermeld: netspanning 220 V, aansluitwaarde 440 VA, $\cos \varphi = 0,5$.

Bereken de opgenomen stroom en het opgenomen vermogen.

Oplossing

$$P_{\text{schijnbaar}} = U \cdot I \text{ of}$$

$$I = \frac{P_{\text{schijnbaar}}}{U}, \text{ dus}$$

$$I = \frac{440}{220} = 2 \text{ A}$$

Het opgenomen vermogen volgt uit:

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi \text{ of}$$

$$P = P_{\text{schijnbaar}} \cdot \cos \varphi, \text{ dus:}$$

$$P = 440 \cdot 0,5 = 220 \text{ W}$$

Voorbeeld 2

Het capaciteitsplaatje van een andere stofzuiger (eveneens voor 220 V) vermeldt een aansluitwaarde van 275 VA en $\cos \varphi = 0,8$.

Bereken opnieuw de opgenomen stroom en het opgenomen vermogen.

Oplossing

$$I = \frac{275}{220} = 1,25 A$$

$$P = 275 \cdot 0,8 = 220 W$$

Stofzuiger 2 levert dus dezelfde prestatie als stofzuiger 1, maar de opgenomen stroom is bij het laatste model 60% kleiner. Stel je voor dat je zelf de elektriciteit moet opwekken, bijvoorbeeld op een camping (of op een velddag) met een benzineaggregaat van 500 VA. Wanneer je dan stofzuiger 1 aansluit kan er nog net een gloeilamp van 60 W bij aangesloten worden (bij een gloeilamp is $\cos \varphi = 1$ dus $P_{gloeilamp} = P_{schijnbaar}$). Dan is het aggregaat vol belast. Bij gebruik van stofzuiger 2 kunnen we 2 lampen van 100 W aansluiten. Dan is het schijnbaar vermogen nog maar 475 VA.

Conclusie

Bij het construeren van elektrische apparaten dient men te streven naar een zo groot mogelijke $\cos \varphi$ (U en I zoveel mogelijk in fase). Dat leidt tot een optimale belasting van de generator en het lichtnet.

4.2 Reactantie en impedantie**Inleiding**

In deze paragraaf maken we kennis met de weerstand die spoelen en condensatoren bieden aan een sinusvormige wisselstroom. In het vorige hoofdstuk werd al meegedeeld dat U en I in dat geval 90° uit fase zijn. De weerstand van een verliesvrije spoel neemt dus geen vermogen op. We zullen zien dat die schijnbare weerstand afhangt van de frequentie van de wisselstroom.

In de wisselstroomtheorie is het gebruikelijk om de effectieve en de maximale waarde van spanning en stroom aan te geven met de hoofdletters U en I . Met de kleine letters u en i geeft men de waarde aan die spanning en stroom op een bepaald tijdstip hebben. Dit is de zogenaamde *momentele* waarde.

4.2.1 Weerstand, reactantie en impedantie

Om verwarring door de verschillende soorten weerstand te voorkomen, heeft men de volgende begrippen ingevoerd:

1. **Weerstand (R)**

Hieronder verstaat men de verhouding tussen U en I bij een gewone weerstand. Volgens de Wet van Ohm geldt immers:

$$R = \frac{U}{I}$$

Aangezien U en I in fase zijn wordt door de weerstand elektrische energie in warmte omgezet (gedissipeerd), net zoals dat bij gelijkstroom het geval is.

2. **Reactantie (X)**

Dat is de verhouding tussen U en I bij een verliesvrije spoel of condensator.

Bij een spoel spreekt men van inductieve reactantie (X_L) en bij een condensator van capacatieve reactantie (X_C).

3. **Impedantie (Z)**

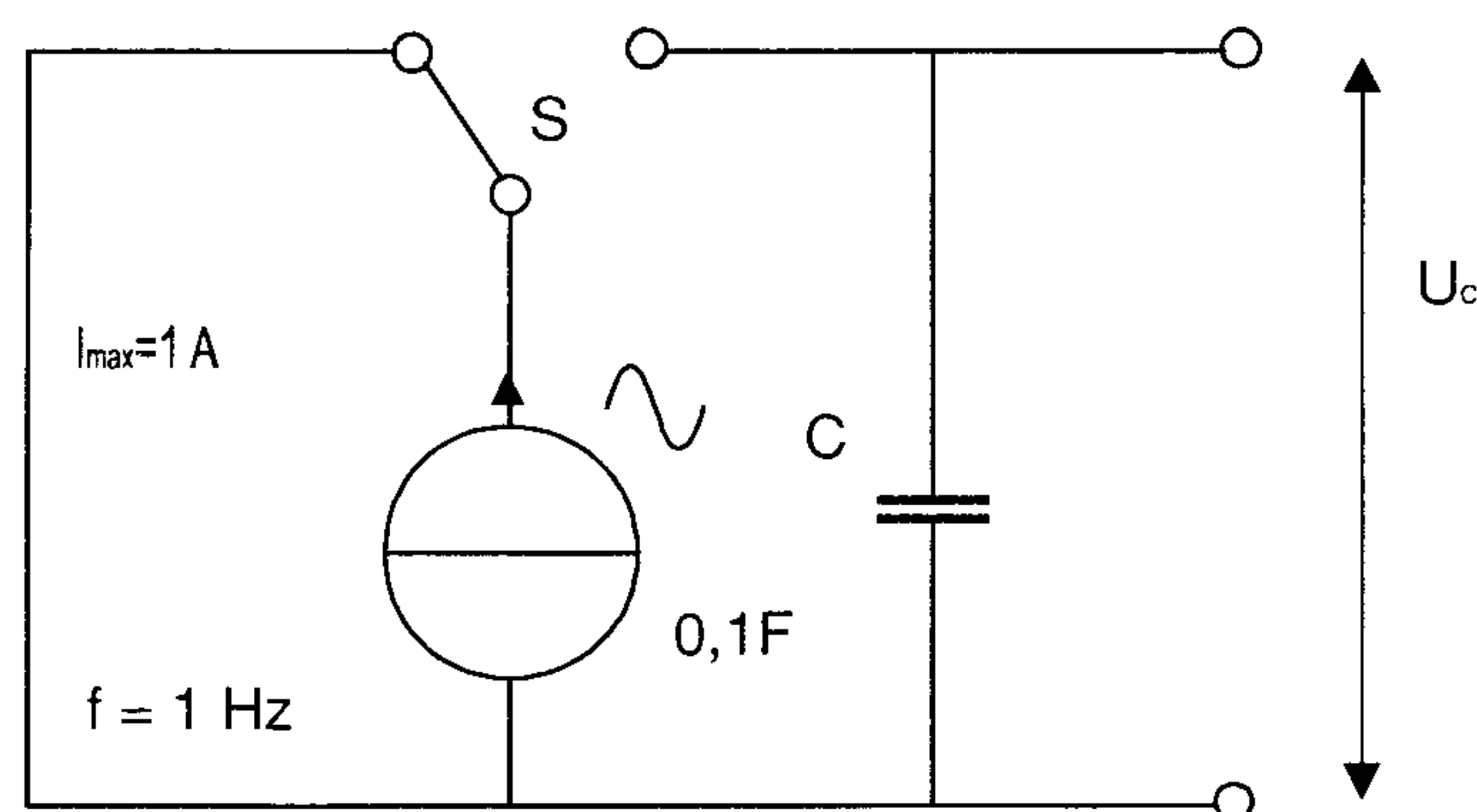
Dat is een verzamelbegrip. Hieronder valt de Ohmse weerstand R , de inductieve reactantie X_L , de capacatieve reactantie X_C , alsmede iedere mogelijke combinatie van R , X_L en X_C . De impedantie wordt, net als de weerstand, uitgedrukt in de eenheid Ohm. Men zegt bijvoorbeeld: "De impedantie van deze schakeling is 5Ω ". Daarmee hebben we een getal in handen dat we zonder meer kunnen invullen in de Wet van Ohm voor wisselstroom:

$$U = I \cdot Z$$

We weten echter niets over de mogelijke faseverschuiving tussen U en I . Als in een bepaald geval bekend is dat U en I in fase zijn, zegt men: deze impedantie is zuiver Ohms.

4.2.2 De reactantie van een condensator

Weet u nog wat een stroombron is? Dat is een bron welke, ongeacht de weerstand van de aangesloten belasting, altijd dezelfde wissel- of gelijkstroom levert. Ideale stroombronnen bestaan niet, maar met een geschikte transistorschakeling kan men het ideaal aardig benaderen.



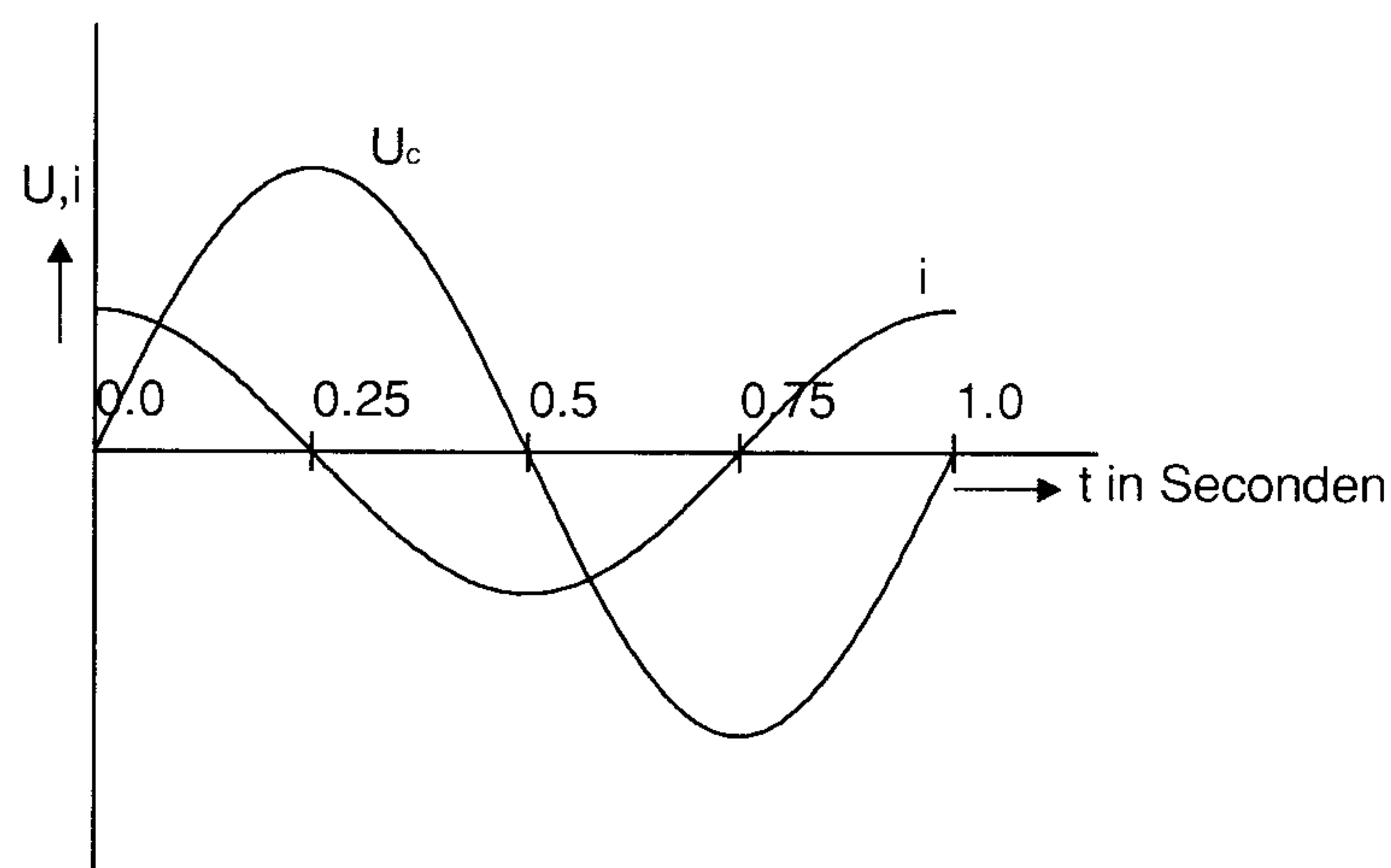
Figuur 4.2-1

In figuur 4.2-1 wordt een ideale wisselstroombron aangesloten op een ongeladen condensator, juist op het moment dat de stroom maximaal is (de kortsluitdraad is nodig omdat een stroombron nooit onbelast mag zijn: bij oneindig hoge weerstand behoort een oneindig hoge spanning! nietwaar?).

In het begin van de eerste kwart periode is de stroom vrij groot en loopt de condensatorspanning snel op (figuur 4.2-2). Geleidelijk aan wordt de stroom kleiner zodat de spanning langzamer toeneemt. Na een kwart periode is de stroom nul en heeft U_C zijn maximum bereikt. Vervolgens keert de stroomrichting om en de condensator wordt ontladen. In het begin gaat dat nog langzaam, maar allengs gaat het steeds sneller. Na een halve periode heeft de stroom zijn negatieve maximum bereikt. Alle lading die de stroombron gedurende de eerste kwart periode in de condensator heeft gepompt is teruggevloeid: U_C is derhalve nul geworden. De stroom blijft nog een kwart periode negatief en het ontladen van de condensator gaat gewoon door: U_C wordt negatief en bereikt het negatieve maximum op

$$t = \frac{3}{4} \text{ seconde.}$$

Nu wordt i weer positief en loopt U_C op.



Figuur 4.2.2 Fase verschuiving tussen u en i bij een condensator

Uit figuur 4.2-2 blijkt, dat de grafiek van de condensatorspanning een sinuslijn is die 90° achterloopt (naijlt) op de stroom. Men kan echter net zo goed zeggen dat de stroom 90° voor ijlt op de spanning. We gaan nu de amplitude van U_C en daarmee de reactantie van een condensator berekenen. Dat doen we door de lading te berekenen welke tijdens de eerste kwart periode wordt geleverd. Daar zijn nogal wat formules voor nodig, maar die hoeft je beslist niet allemaal te onthouden. Bij het voorbereiden op het examen kunnen we ermee volstaan de formules waar een ster (*) achter staat uit het hoofd te leren. We weten nog dat:

$$Q = I \cdot t \quad (1)$$

Hierin stelt I een constante gelijkstroom voor, maar in ons geval verandert I sinusvormig (dus schrijven we i). Voor het berekenen van de lading moeten we voor i de gemiddelde waarde van de stroom gedurende de eerste kwart periode invullen. Voor een sinusvormige wisselstroom geldt:

$$I_{gem} = \frac{2}{\pi} \cdot I_{max} \quad (2)$$

De tijdsduur van een kwart periode is:

$$T = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{f} = \frac{1}{4 \cdot f} \quad (3)$$

Formules 2 en 3 invullen in formule 1:

$$Q = \frac{2}{\pi} \cdot I_{max} \cdot \frac{1}{4 \cdot f} = \frac{I_{max}}{2 \cdot \pi \cdot f} \quad (4)$$

Voor een condensator geldt:

$$U = \frac{Q}{C} \quad (5)$$

Vervangen we in formule 5 de Q door formule 4 dan vinden we:

$$U_{max} = \frac{I_{max}}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} \quad (6)$$

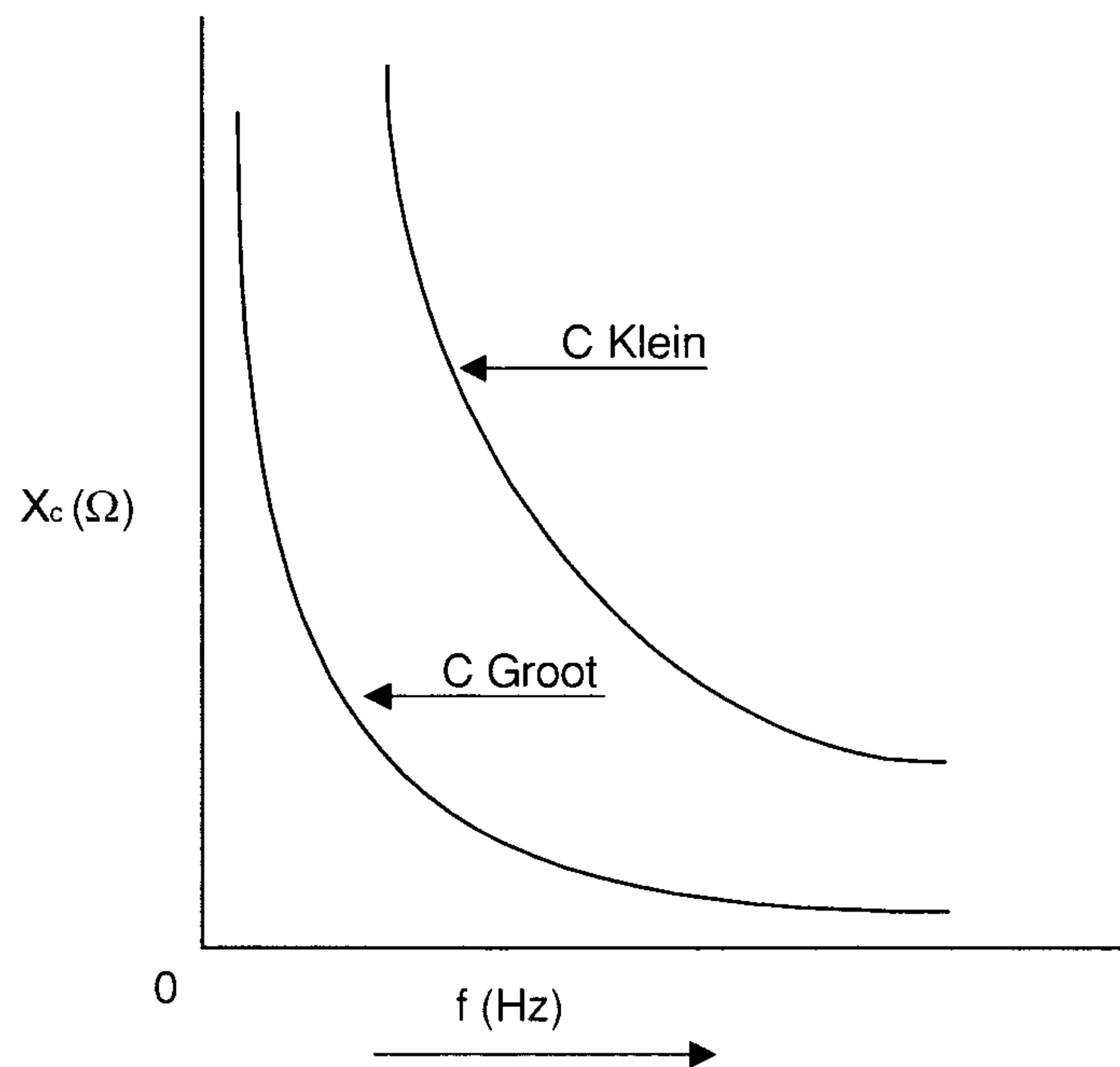
Wanneer we voor het gemak als voorbeeld een frequentie $f = 1$ Hz en $C = 0,1$ F nemen wordt U_{max}

$$U_{max} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 0,1} = 1,59V$$

Het leuke is dat we met formule 6 bijna de reactantie van een condensator te weten zijn gekomen. We hebben X_C immers gedefinieerd als de verhouding van U en I . Het maakt daarbij niets uit of je voor U en I de gemiddelde, de effectieve of de maximale waarde invult. Bij een verhouding vallen de betreffende omreken factoren tegen elkaar weg. Dus:

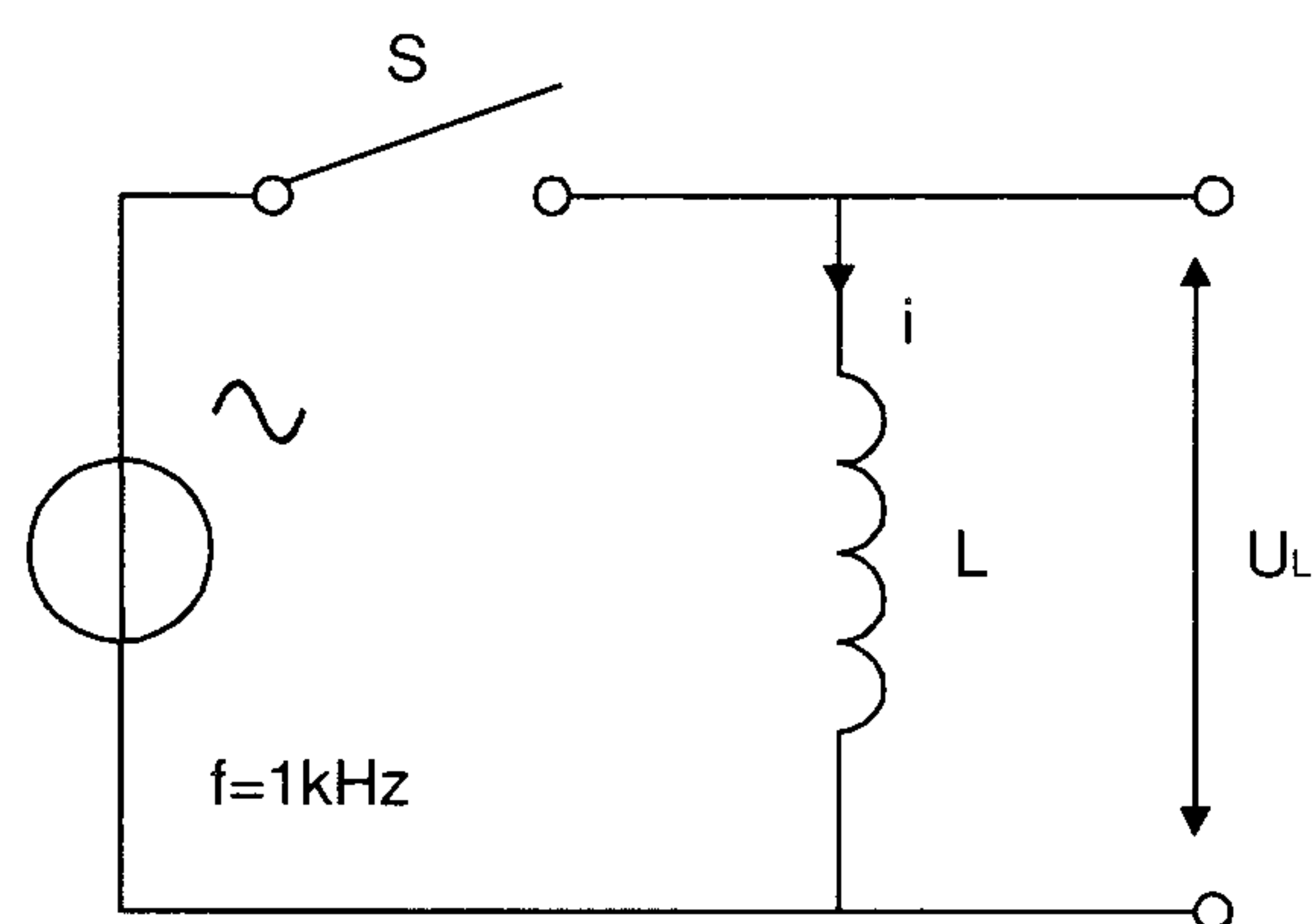
$$X_C = \frac{U_{max}}{I_{max}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} \quad (7) *$$

Hieruit volgt dat de reactantie van een condensator X_C omgekeerd evenredig verandert met de frequentie en de capaciteit. Naarmate men f of C groter maakt wordt X_C kleiner. Figuur 4.2-3 geeft dit grafisch weer.



Figuur 4.2.3 Het verband tussen reactantie en frequentie bij een condensator. Aangezien X_c omgekeerd evenredig is met C , zal een kleine capaciteit een grote reactantie opleveren.

In de praktijk kun je een technicus horen beweren: “Er loopt een stroom van 5 A door deze condensator.” Dat is feitelijk onmogelijk. Een condensator bestaat immers uit twee geleiders met een isolator ertussen. Als we echter wisselspanning op een condensator zetten loopt er afwisselend laad- en ontladstroom naar de platen van de condensator. Daardoor lijkt het of er stroom doorheen vloeit. Het technische spraakgebruik is op dit punt een beetje slordig.



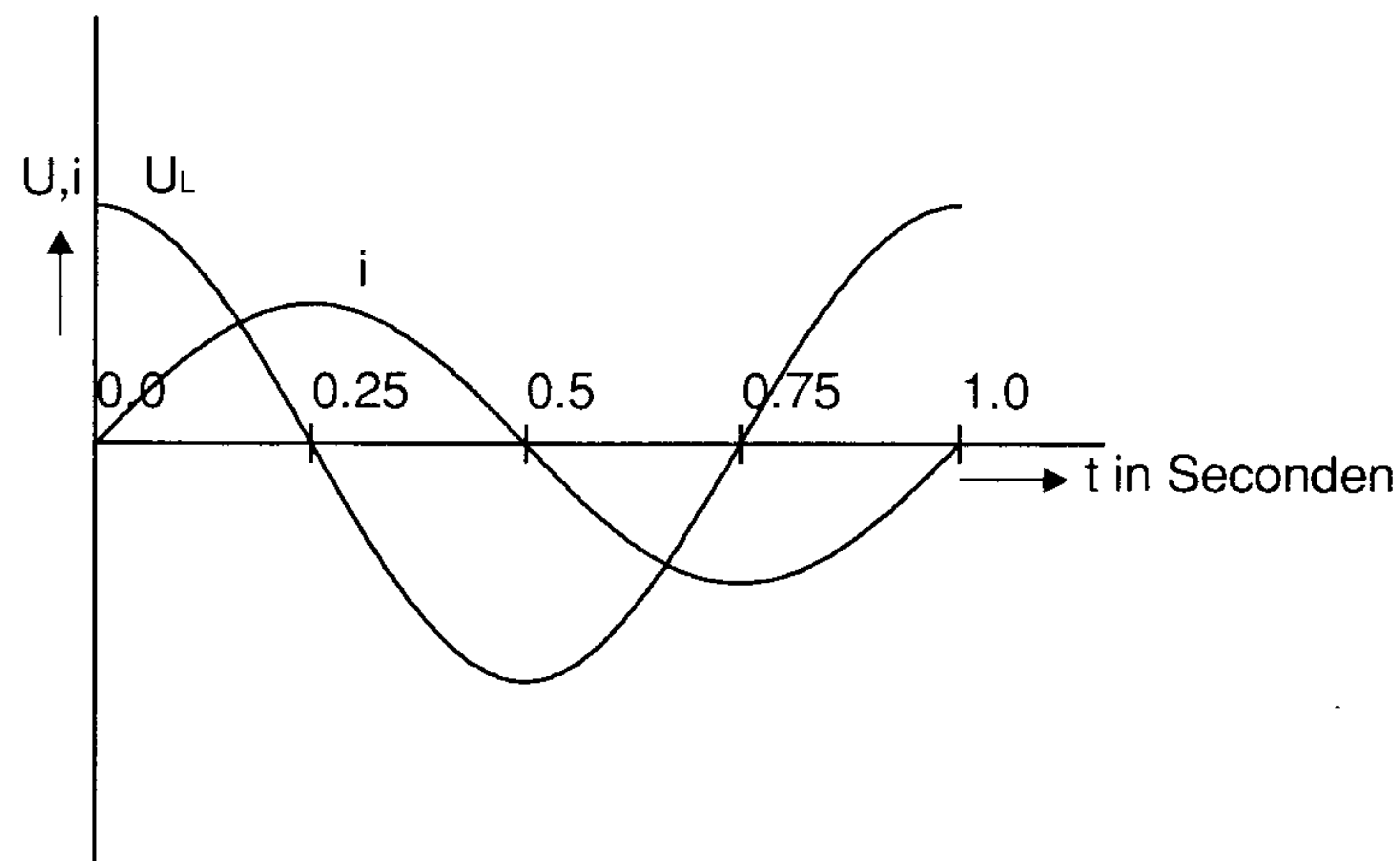
Figuur 4.2.4

4.2.3 De reactantie van een spoel

Figuur 4.2-5 toont de reactie van een spoel op een aangelegde wisselspanning. De schakelaar in figuur 4.2-4 wordt weer gesloten op het moment dat de spanning U maximaal is. In het begin neemt de stroom snel toe. Daar de spanning geleidelijk afneemt, vlt de stroomcurve af om een maximum te bereiken op het moment dat $u = 0$. Gedurende de eerste

kwartperiode is er energie opgehoopt in het magneetveld van de spoel. Deze energie stelt de spoel in staat om de stroom gedurende de volgende kwartperiode in dezelfde richting te laten vloeien, ook al is de spanning dan negatief. De spoel levert nu energie aan de spanningsbron. Op het tijdstip $t = 0,5$ is alle energie, die gedurende de eerste kwartperiode werd opgenomen, aan de spanningsbron teruggeleverd. De spanning blijft echter nog een kwartperiode negatief en dus keert de stroomrichting om. De spoel begint nu weer energie op te nemen. Op het tijdstip $t = 0,75$ bereikt i het negatieve maximum. Vervolgens wordt U positief, maar dankzij de opgehoopte energie blijft i nog een kwartperiode negatief.

Uit figuur 4.2-5 blijkt dat de stroomcurve ook een sinuslijn is die 90° naaijt op de spanning.



Figuur 4.2-5 Fase verschuiving tussen u en i bij een spoel.

We gaan nu de amplitude van de stroom berekenen. Uit hoofdstuk 3.5. weten we nog dat:

$$\Delta I = \frac{U}{L} \cdot \Delta t \quad (8)$$

Op het moment van inschakelen is $i = 0$ en dus mogen we de delta's in formule 8 weglaten. Voor u moeten we de gemiddelde waarde van de spanning gedurende de eerste kwartperiode en voor T de tijdsduur van een kwartperiode invullen, dus

$$U_{gem} = \frac{2}{\pi} \cdot U_{max} \quad \text{en} \quad t = \frac{1}{4 \cdot f} \quad \text{zodat}$$

$$I_{max} = \frac{\frac{2}{\pi} \cdot U_{max}}{L} \cdot \frac{1}{4 \cdot f} = \frac{U_{max}}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot L} \quad (9)$$

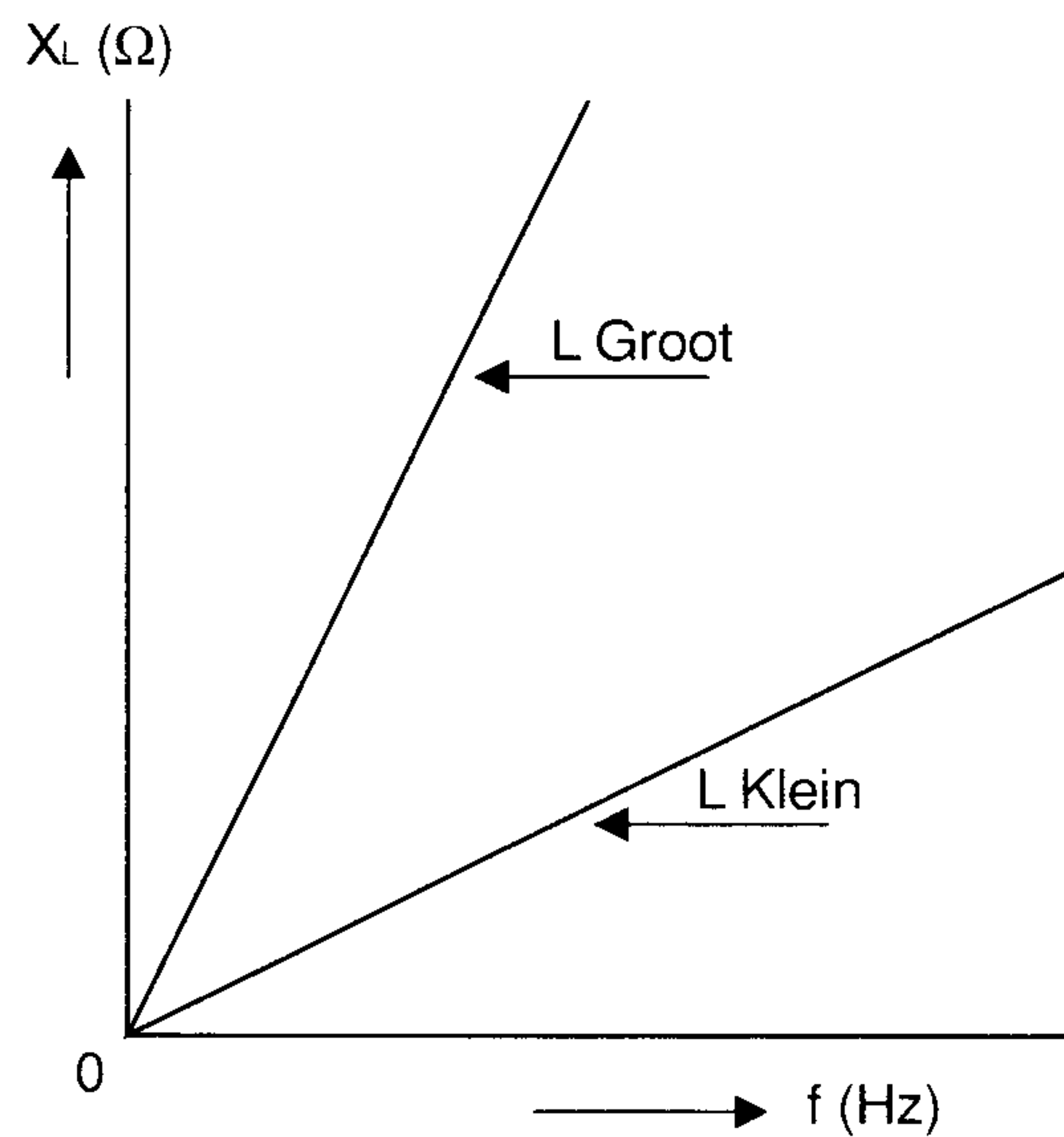
Dus:

$$\frac{I_{\max}}{U_{\max}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot L} \quad (10)$$

Omdat $X_L = \frac{U}{I}$ (het omgekeerde van formule 10) keren we deze om en vinden:

$$X_L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L \quad (11)^*$$

Waaruit blijkt dat X_L evenredig is met f en L . Naarmate men f of L groter maakt wordt X_L eveneens groter. Figuur 4.2-6 geeft dat grafisch weer.



Figuur 4.2.6 Het verband tussen reactantie en frequentie bij een spoel. Daar X_L recht evenredig is met L levert een grote L ook een grote reactantie op.

4.2.4 De radiaalfrequentie ω (Omega)

In de formules 7 en 11 zien we het produkt $2 \cdot \pi \cdot f$ verschijnen. Om het schrijfwerk te bekorten heeft men een nieuw begrip ingevoerd, namelijk de cirkel- of radiaalfrequentie (ω). Deze volgt uit de formule:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \quad (12)^*$$

Nu kunnen we de formules 7 en 11 korter schrijven:

$$X_c = \frac{1}{\omega \cdot C} \quad *$$

en

$$X_l = \omega \cdot L \quad *$$

2π is een onbenoemd of wel dimensieloos getal (er staat geen eenheid achter) en f wordt uitgedrukt in perioden/seconde, ook wel Hertz genaamd. ω is dus een aantal/seconde en wordt uitgedrukt in radialen/seconde.

In paragraaf 4.3. gaan we wat dieper op ω in.

Voorbeeld

Gegeven: een frequentie van 2,5 kHz.

Bereken de cirkelfrequentie.

Oplossing:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot 3,14 \cdot 2,5 \cdot 10^3 = 15,7 \text{ krad/s}$$

Werken met kilo-radialen is niet zo gebruikelijk. We spreken in deze gevallen meestal van: $15,7 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$

4.2.5 Serie- en parallelschakeling van reactanties

Wanneer we ons beperken tot reactanties van dezelfde soort (dus alleen spoelen of alleen condensatoren) dan mogen we de formules voor de serie- en parallelschakeling van weerstanden gebruiken. Bij spoelen geldt als extra beperking dat het magneetveld van de ene spoel de andere spoel niet mag beïnvloeden. Men spreekt dan van niet-gekoppelde spoelen.

Schakelt men twee van zulke spoelen in serie dan geldt:

$$X_{\text{totaal}} = X_1 + X_2,$$

waarin

$$X_1 = \omega \cdot L_1$$

en

$$X_2 = \omega \cdot L_2,$$

dus:

$$\omega \cdot L_t = \omega (L_1 + L_2) \text{ (formule 13)}$$

Delen door ω levert: $L_t = L_1 + L_2$

Zo vinden we voor parallelschakeling:

$$\frac{1}{L_t} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \text{ of } L_t = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2} \quad (14)$$

Bij de serieschakeling van twee condensatoren gaan we op dezelfde manier te werk. Nu geldt echter:

$$X_c = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

De uitdrukking $X_t = X_1 + X_2$ gaat over in:

$$\frac{1}{\omega \cdot C_t} = \frac{1}{\omega \cdot C_1} + \frac{1}{\omega \cdot C_2}$$

Na vermenigvuldigen met ω volgt:

$$\frac{1}{C_t} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \text{ of } C_t = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \quad (\text{formule 15})$$

Voor de parallelschakeling geldt in het algemeen:

$$\frac{1}{X_t} = \frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2}$$

Voor de condensator geldt:

$$\frac{1}{X_c} = \omega \cdot C \text{ dus: } \omega \cdot C_t = \omega(C_1 + C_2)$$

waaruit volgt:

$$C_t = C_1 + C_2 \quad (\text{formule 16})$$

Wanneer we de formules 15 en 16 vergelijken met de formules 13 en 14, dan lijkt het wel of de serie- en parallelschakeling door elkaar gehaald zijn. Houdt deze verwisseling goed in de gaten!

4.3 Vectoren

Inleiding

In paragraaf 4.1. hebben we onder andere geleerd dat we bij het optellen van twee of meer wisselstromen rekening moeten houden met het onderlinge faseverschil. Wanneer twee stromen I_1 en I_2 in fase zijn volgt de som uit:

$$I_t = I_1 + I_2$$

Zijn ze 180° uit fase (in tegenfase) dan geldt:

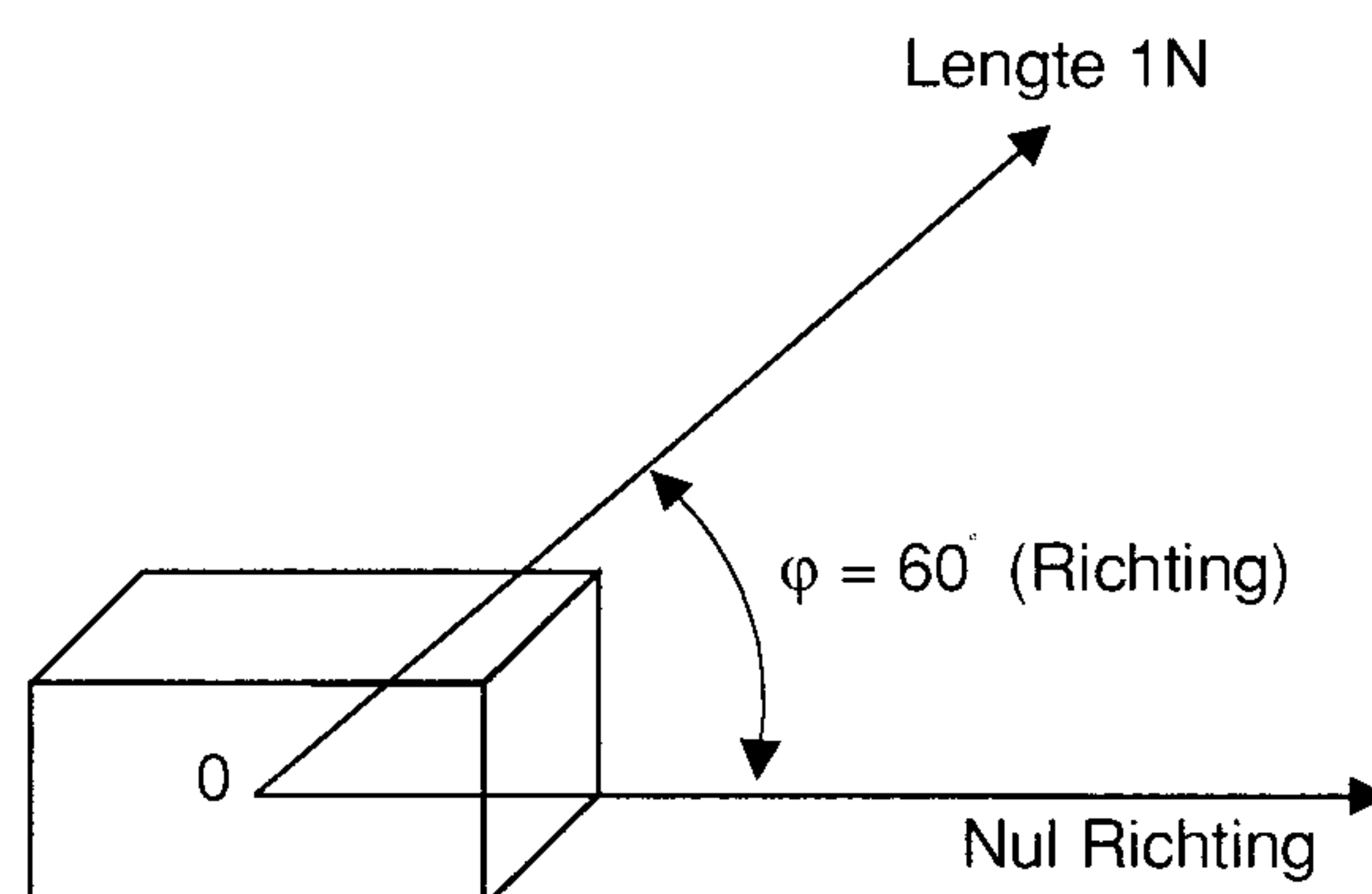
$$I_t = I_1 - I_2$$

Hoe zit dat nu bij een willekeurig faseverschil, bijvoorbeeld 60° , 90° of 120° ?

Dit probleem is elegant op te lossen met behulp van vectoren. Daarmee kunnen we de toestand van een elektrische schakeling vertalen in een meetkundige voorstelling, het zogenaamde vectordiagram. Dat geeft een duidelijk inzicht en we kunnen meetkundige stellingen (Pythagoras) en constructies gebruiken om het elektrische vraagstuk op te lossen. Wanneer we ook maar iets van bijvoorbeeld resonantie kringen willen begrijpen, moeten we de vertaal methode, waarmee we in deze paragraaf een begin maken, goed beheersen.

Vectoren

Onder een vector verstaan we in deze cursus een grootte die volledig wordt bepaald door een richting en een grootte. In de mechanica komen ze vaak voor. Zo zijn kracht, verplaatsing en snelheid voorbeelden van vectoren. In al deze gevallen is er immers sprake van een grootte: de kracht waarmee we trekken of de afstand waarover we ons verplaatsen, alsmede de richting waarin dat gebeurt. We gaan nu een meetkundige voorstelling van een vector maken. Dat doen we door een pijl te tekenen, waarvan de lengte evenredig is met de grootte en die wijst in de richting van de voor te stellen grootte. Om onze tekening eenduidig vast te leggen moeten we eerst een beginpunt en een nulrichting afspreken (enigszins te vergelijken met de “noord” pijl op een landkaart). Bij het beginpunt zetten we de letter O (van oorsprong) en de nulrichting kiezen we in deze cursus horizontaal naar rechts. In figuur 4.3-1 stelt de vector een kracht van 1 Newton voor, welke onder een hoek van 60° werkt op een steen die in de oorsprong ligt.

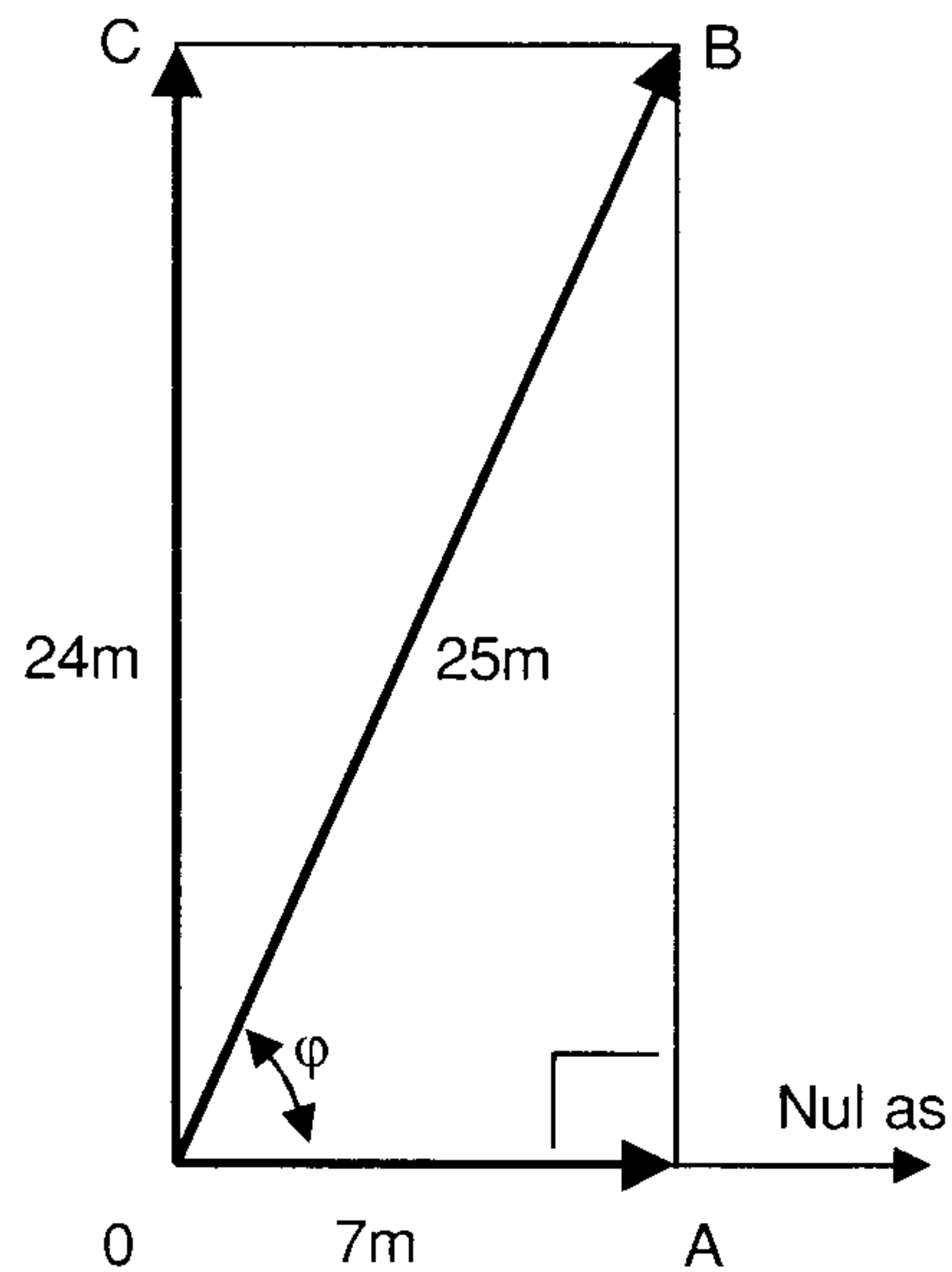


Figuur 4.3-1 Voorbeeld van een vector

Onthoud goed: In deze cursus verstaan we onder een vector een lijnstuk dat begint in de oorsprong. Een vector heeft een lengte aangegeven met de letter l . Tevens maakt een vector een hoek met de nul-as aangegeven door de griekse letter φ (spreek uit fi).

4.3.1 Rekenen met vectoren

Voor het werken met vectoren zijn rekenregels afgesproken, welke zijn te beschouwen als een uitbreiding van de rekenregels uit de gewone rekenkunde. Zo kunnen we vectoren optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. In deze cursus houden we ons alleen bezig met de eerste twee bewerkingen. Daarmee kunnen we bijvoorbeeld uitrekenen wat er gebeurt als op de steen uit figuur 4.3-1 twee krachten werken of wanneer een voorwerp tegelijkertijd twee bewegingen uitvoert. Figuur 4.3-2 geeft het voorbeeld van een proefpersoon die met een veerboot een 24 m brede vaart oversteeft (vector OC). Tegelijkertijd loopt hij vanuit punt O naar rechts over het 7 m brede dek, vector OA (dat zijn weliswaar vreemde verhoudingen, maar het levert mooie getallen op). Als onze proefpersoon aan de overkant is aangekomen, heeft hij netto de weg volgens vector OB afgelegd. De vector OB noemen we de resultante van de vectoren OA en OC.



Figuur 4.3-2

Het maakt voor het punt waar onze persoon aankomt (punt B), en daarmee voor de vector OB, niets uit of de verplaatsingen tegelijkertijd of na elkaar worden uitgevoerd. Onze proefpersoon had dus ook eerst van O naar A mogen lopen om vervolgens van A naar B te varen. De vector OB is dus opgebouwd uit de vector OA plus het lijnstuk AB. Strikt genomen mogen we AB geen vector noemen, want het begint niet in de oorsprong. We zien echter dat AB even lang is als OC en het maakt dezelfde hoek met de nul-as (90°). Om duidelijk te maken dat we de vectoren OA, OB en OC bedoelen en niet de lengte van het overeenkomstige lijnstuk, zetten we boven de vectoraanduiding voortaan een pijltje. We kunnen nu zeggen:

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{OC}$$

Het + teken fungeert als symbool voor de vector-optelling. Wanneer we de pijltjes weglaten bedoelen we met OA, OB en OC de lengte van een lijnstuk en staat het + teken voor de gewone optelling.

De lengte van OB is te berekenen door in driehoek OAB de stelling van Pythagoras toe te passen:

$$OB^2 = OA^2 + AB^2 \text{ of}$$

$$OB^2 = 7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$$

Hieruit volgt:

$$OB = \sqrt{625} = 25 \text{ m}$$

Voor de rekenaars die er behoefte aan hebben: de hoek van OB met de nul-as, hoek φ , is te berekenen met behulp van de tangens (afgekort *tan*).

Zoals we in het eerste hoofdstuk hebben gezien is de tangens gedefinieerd als:

$$\tan \varphi = \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{aanliggende zijde}}$$

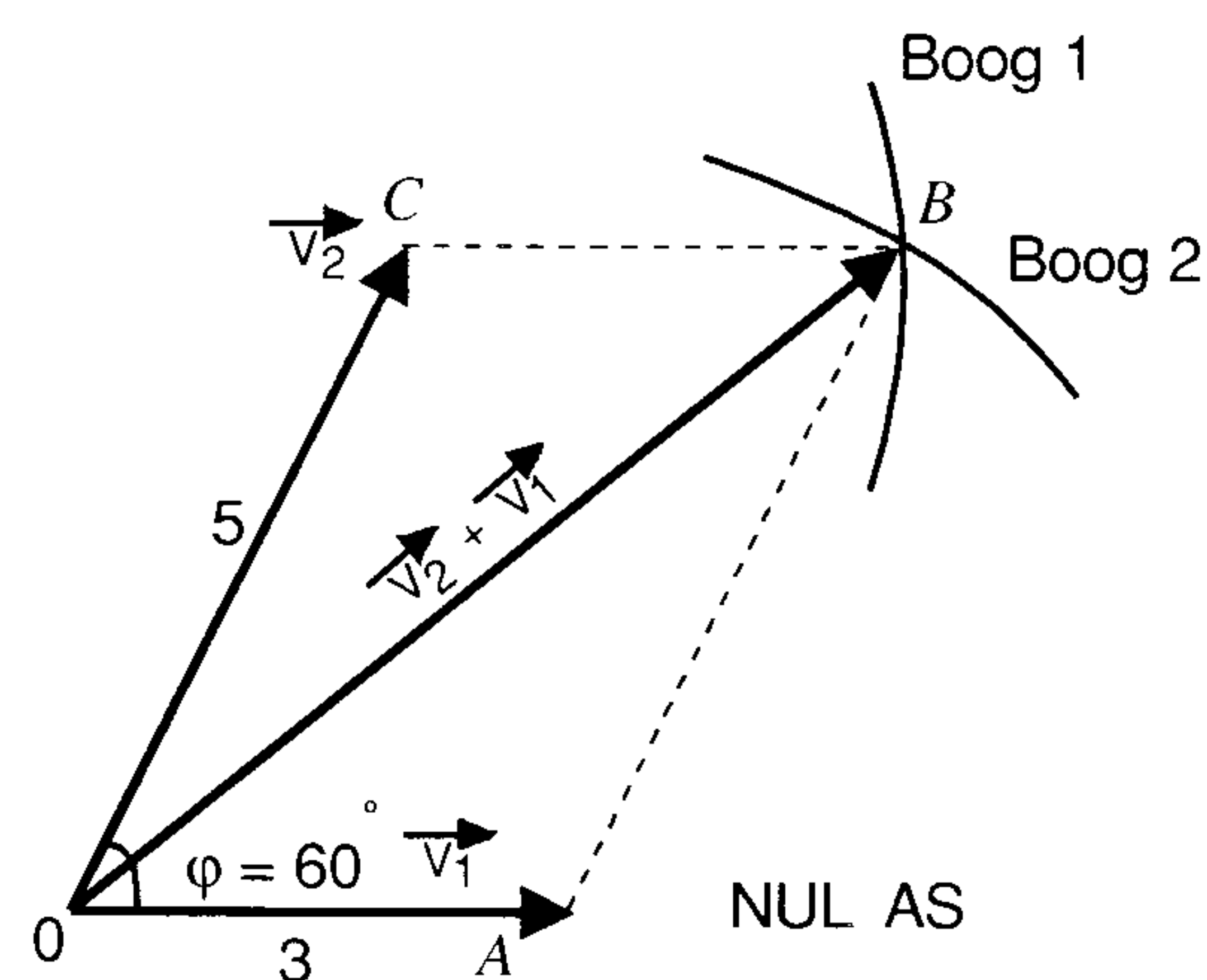
Op sommige rekenmachines zit de TAN-toets. Daarmee kunnen we de tangens berekenen als φ bekend is, maar wat we nu willen is precies het omgekeerde. Dat terugzoeken gaat via de arctangens. Enkele rekenmachines hebben daar een ARC toets voor, maar meestal moet je eerst op de functietoets drukken. Probeer maar: intoetsen 3,429 FUN TAN, waarna op het display verschijnt: 73.74 en dat is de hoek φ in graden.

Vraag:

Kun je de hoek φ ook via de SINUS of COSINUS berekenen?

In dit voorbeeld stonden de bewegingen loodrecht op elkaar en daardoor ontstond de rechthoek OABC, maar hoe gaat het nu als de vectoren een willekeurige hoek maken? In figuur 4.3-3 is een voorwerp getekend dat twee bewegingen uitvoert welke onder een hoek van 60° staan (de vectoren v_1 en v_2). Voor het gemak is de eerste vector evenwijdig aan de nul as gekozen. We gaan er weer van uit dat we de bewegingen na elkaar mogen uitvoeren. Dus eerst 3 meter naar rechts vanuit O en dan 5 m evenwijdig aan OC omhoog. Zodoende ontstaat het parallellogram OABC. De vector OB is de gezochte som van v_1 en v_2 .

Er bestaat een fraaie manier om een parallellogram te tekenen met behulp van een passer:



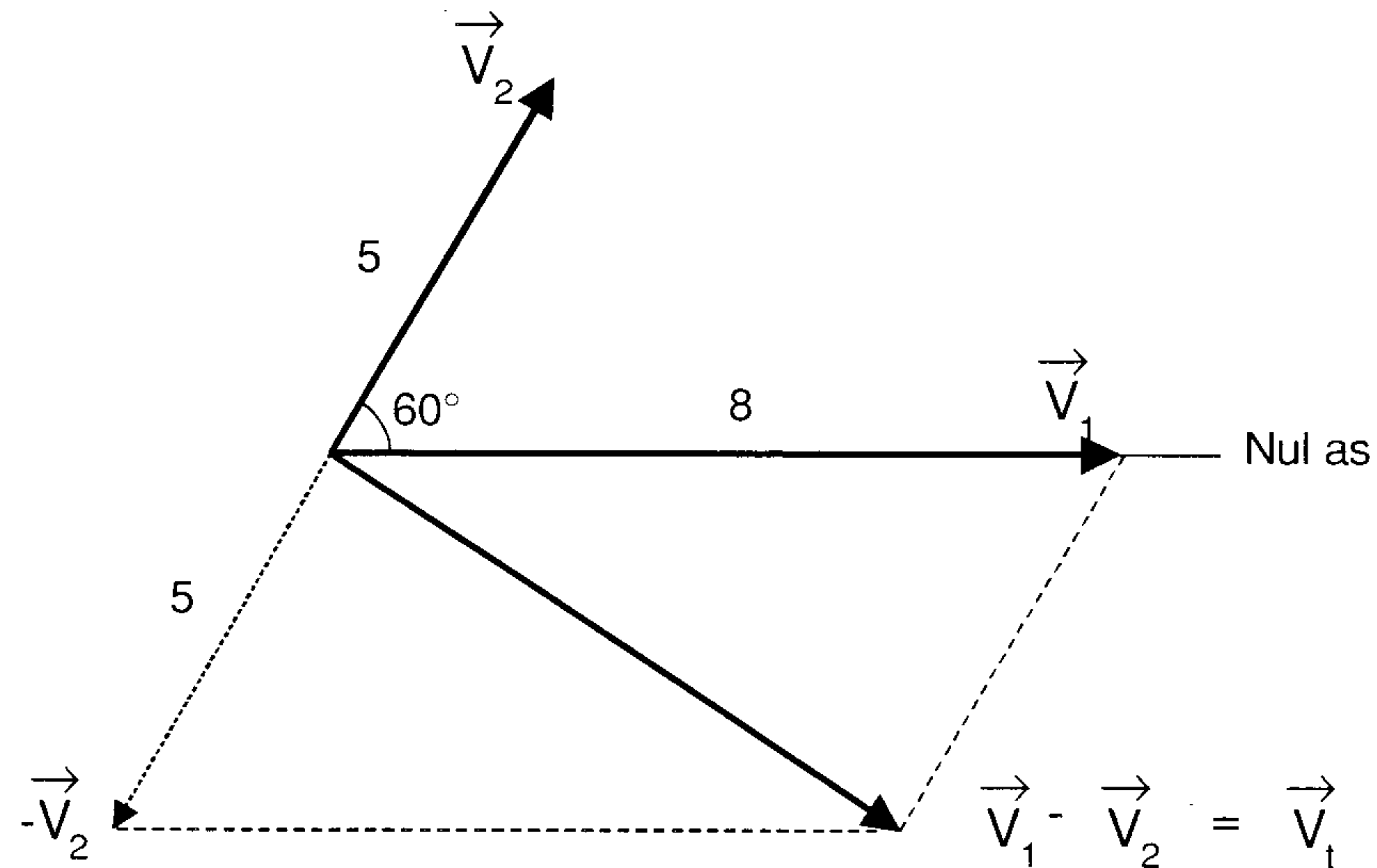
Figuur 4.3.3 Parallellogram constructie m.b.v. passer en liniaal. De vector OB stelt de som van v_1 en v_2 voor.

Neem de afstand OA tussen de benen van de passer, zet de passerpunt in punt C en trek de cirkelboog 1. Neem vervolgens de afstand OC tussen de benen en trek cirkelboog 2 vanuit punt A. Het snijpunt van de cirkelboogjes

levert het gezochte punt B. Met deze parallellogram constructie hebben we de algemene regel voor het vectorisch optellen uitgevoerd.

4.3.2 Verschil van 2 vectoren

Hoewel het niet vaak voorkomt zullen we even bekijken hoe men het verschil van twee vectoren bepaalt (figuur 4.3-4). Om v_2 van v_1 af te trekken tekenen we eerst het spiegelbeeld van v_2 ; de vector $-v_2$. Deze vector is even lang maar wijst de tegenovergestelde kant op. Vervolgens voeren we met v_1 en $-v_2$ de parallellogram constructie uit.



Figuur 4.3.4

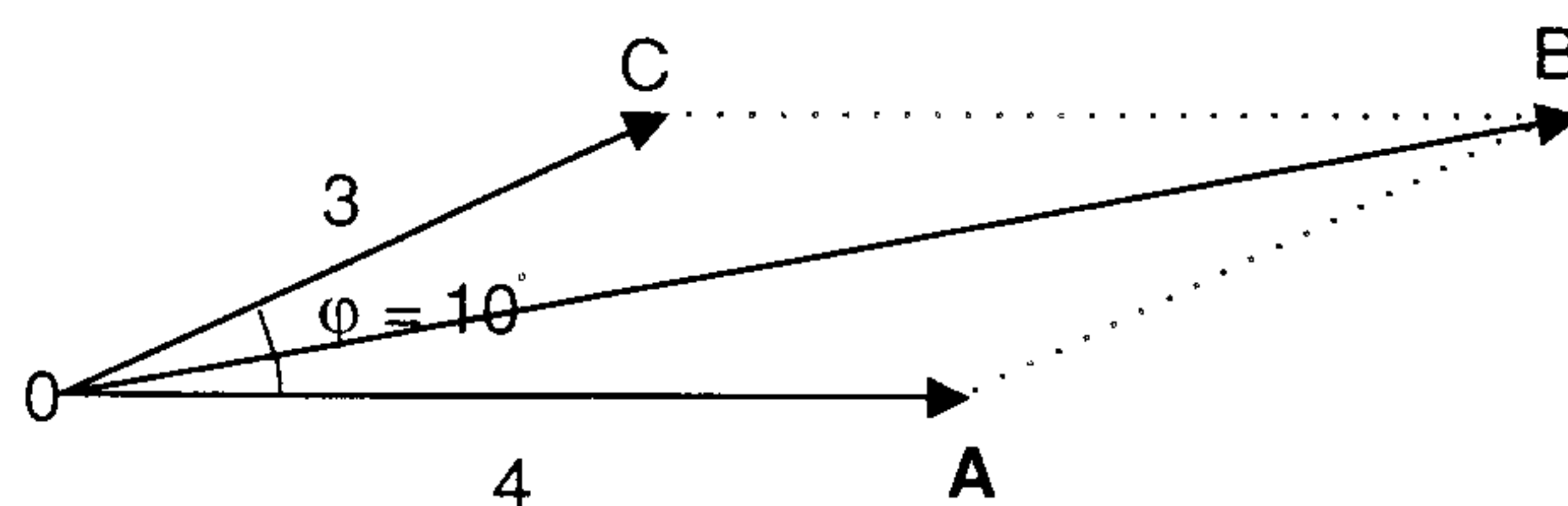
4.3.3 Bijzondere gevallen

Situatie 1: $\varphi = 0^\circ$

In figuur 4.3-5a zijn 2 vectoren getekend onder een hoek van ca. 10° . Door die kleine hoek liggen OA en AB bijna in elkaars verlengde. De lengte van OB is daardoor iets kleiner dan OA + OC (OC is immers even lang als AB). Als we φ exact gelijk aan nul maken is het parallellogram plat geslagen en liggen OA en OC precies in elkaars verlengde en geldt:

$$OB = OA + OC$$

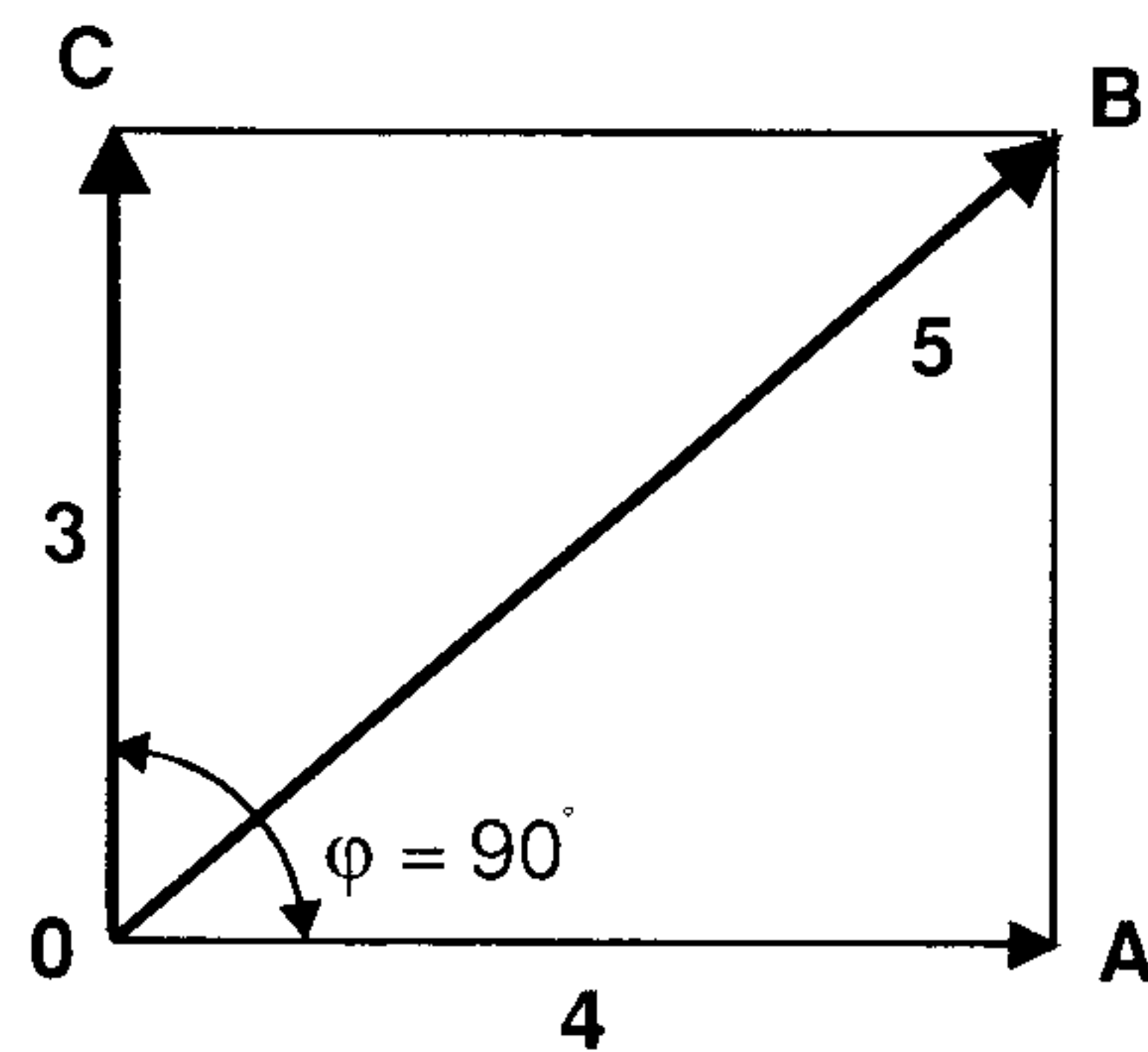
Met andere woorden: we mogen (alleen in dit bijzondere geval) de vector optelling vervangen door de optelling uit de gewone rekenkunde.



Figuur 4.3.5a Een heel kleine hoek

Situatie 2: $\varphi = 90^\circ$

In dit geval kunnen we stelling van Pythagoras toepassen in de driehoek OAB (figuur 4.3-5b), dus:



Figuur 4.3.5b Een rechte hoek

Bij gewone (dus foutieve) optelling van de vectoren is de uitkomst 7.

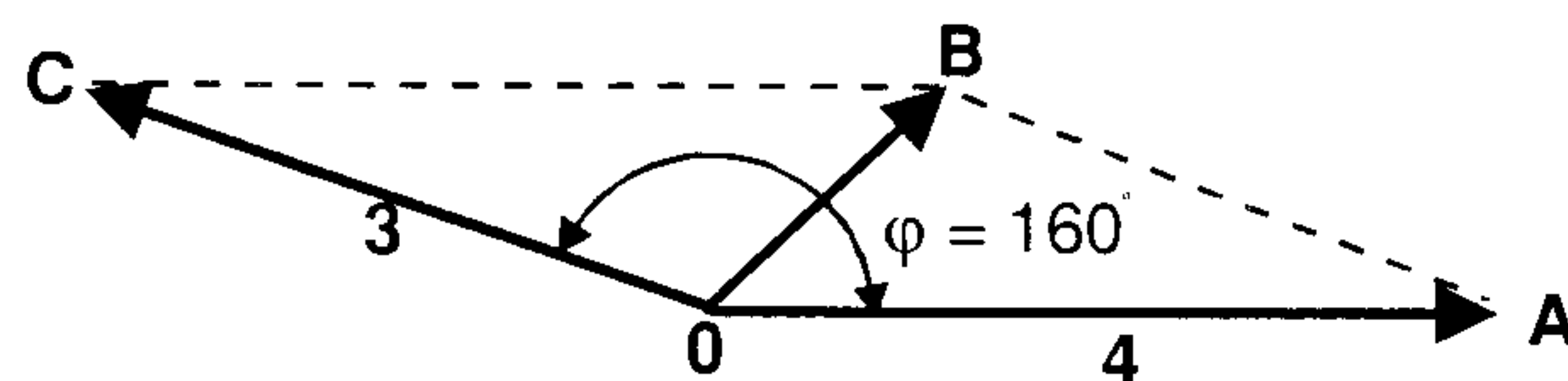
Getallencombinaties zoals: (3 - 4 - 5), welke een mooie uitkomst geven, noemt men wel Pythagoras-getallen. Om wat variatie in de vraagstukken te krijgen werkt men ook met de veelvouden van deze getallen, zoals (6 - 8 - 10) of (9 - 12 - 15). Daar de verhoudingen niet veranderen levert dat in feite dezelfde figuur op. Andere bekende Pythagoras-getallen zijn: (5 - 12 - 13) en (7 - 24 - 25). Wanneer we in een vraagstuk deze verhoudingen tijdig herkennen, kunnen we ons veel rekenwerk besparen.

Situatie 3 $\varphi = 180^\circ$

Figuur 4.3-5c geeft de situatie weer als φ nadert tot 180° . Het lijnstuk AB verloopt min of meer tegengesteld aan OA. Daardoor is de lengte van OB bij benadering gelijk aan $OA - OC$. Als $\varphi = 180^\circ$, is het parallellogram wederom platgeslagen en geldt:

$$OB = OA - OC$$

Toch is dit het resultaat van een vector *optelling*. Het verschil met de gewone optelling is nu wel erg groot!



Figuur 4.3-5c Een heel grote hoek

Samenvatting

In de figuren 4-3-5 a t/m c vindt u enkele bijzondere gevallen van de vector optelling.

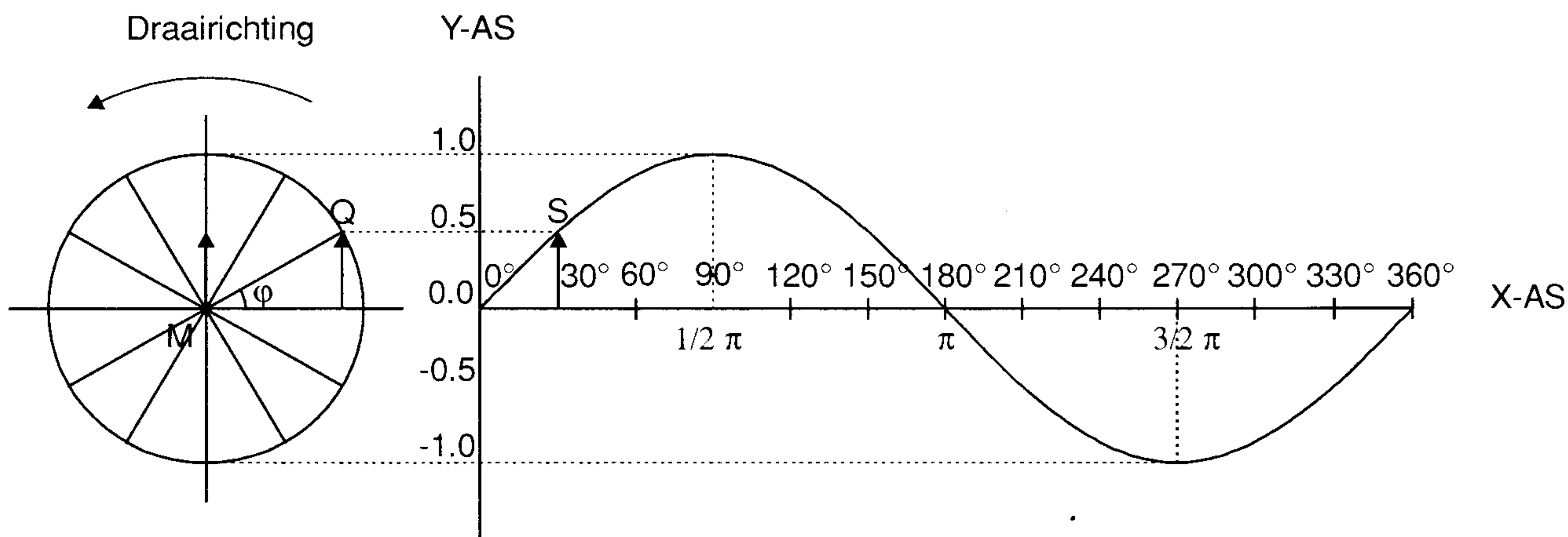
- a) φ nadert tot nul. De lengte van OB nadert tot $OA + OC$. De vector optelling gaat over in de gewone optelling.
- b) $\varphi = 90^\circ$. In rechthoek OABC geldt: $OB = \sqrt{OA^2 + AB^2}$
- c) φ nadert tot 180° . Aangezien OA en OC bijna tegen elkaar in staan nadert de lengte van OB tot $OA - OC$.

4.3.4 Voorstelling van een sinusvormig signaal door een draaiende vector

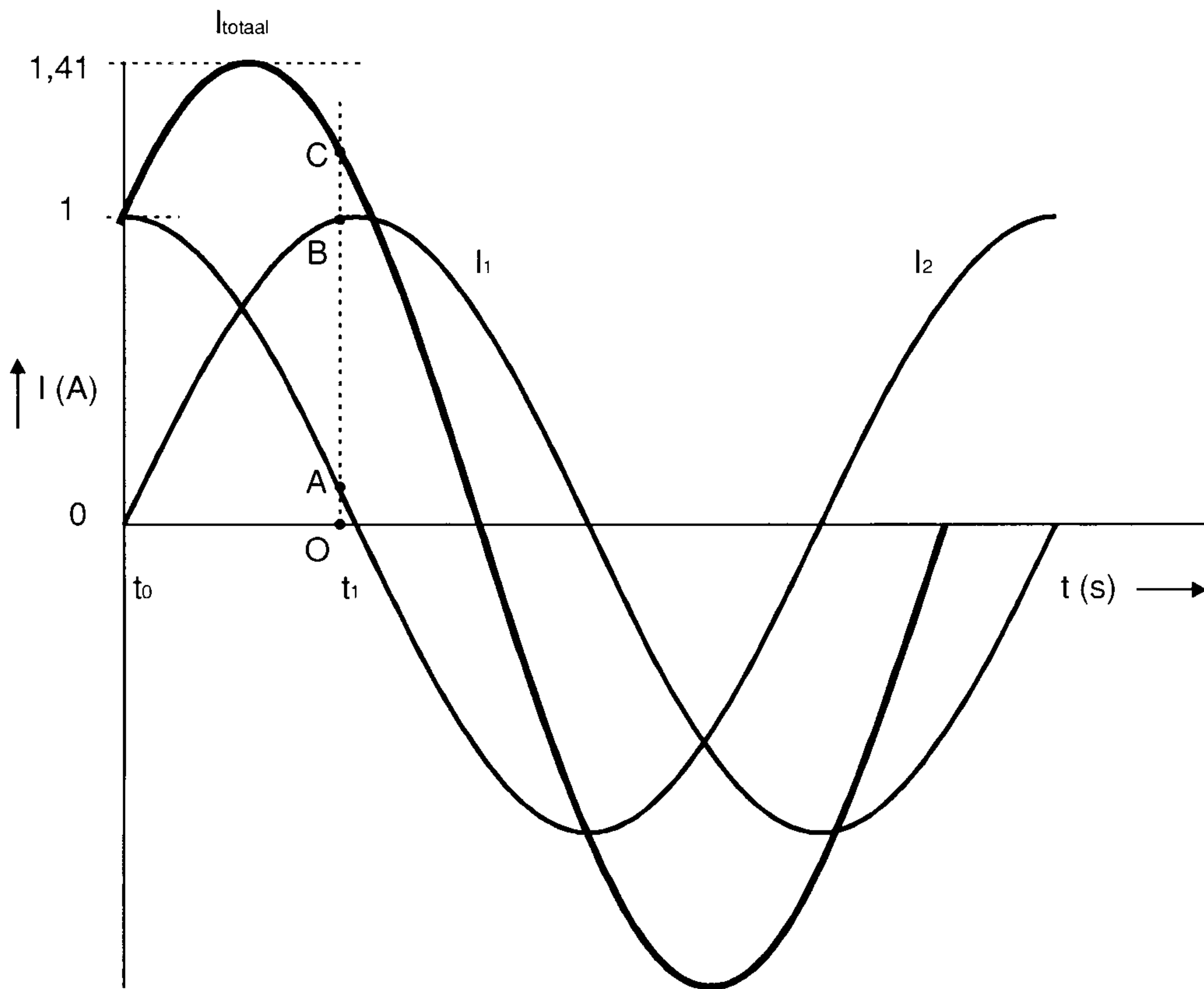
Hoewel deze cursus bedoeld is voor zendamateurs en niet voor wiskundigen is het toch nodig geduld op te brengen voor de voorgaande theorie. Het is namelijk mogelijk om een sinusvormige spanning of stroom voor te stellen door een ronddraaiende vector. We zullen dat niet uitputtend bewijzen maar ons ertoe beperken dit enigszins aannemelijk te maken. Daartoe is in figuur 4.3-6 nogmaals de constructie van de sinuslijn afgedrukt. De straal van de cirkel, het lijnstuk MQ, is in feite een vector. Bij de constructie van de sinuslijn laten we Q over de cirkelomtrek lopen. Als we de lengte van MQ beschouwen als de eenheid waarin alle andere afstanden zijn uitgedrukt, is de sinus van hoek φ gelijk aan de projectie van MQ op de verticale as (lijnstuk PQ in figuur 4.3-6). Evenzo is $\cos \varphi$ gelijk aan de projectie van MQ op de horizontale as (lijnstuk MP). We kunnen de zaak ook omdraaien: Als S de sinuslijn doorloopt, beschrijft Q een cirkel. De voorstelling van een sinus door een draaiende vector is dus niets anders dan een omgekeerde sinusconstructie.

Merk op dat de vector tegen de klok in draait. Dat is een afspraak uit de goniometrie waaraan wij ons hier ook houden. Welke hoek legt de vector MQ nu per seconde af? Wanneer S één periode van de sinus doorloopt, beschrijft Q een volledige cirkel dus 360° . In hoofdstuk 1 hebben we al geleerd dat men in de wiskunde liever met radialen (afgekort *rad*) werkt. Deze hoekmaat is zo gekozen dat $360^\circ = 2\pi$ radiaal. Onze vector legt tijdens één periode dus 2π radialen af. Aangezien punt S per seconde f perioden uitvoert legt de vector per seconde $2\pi f$ radialen af. Dat is nu de cirkelfrequentie ω , die we in de vorige paragraaf al zijn tegengekomen.

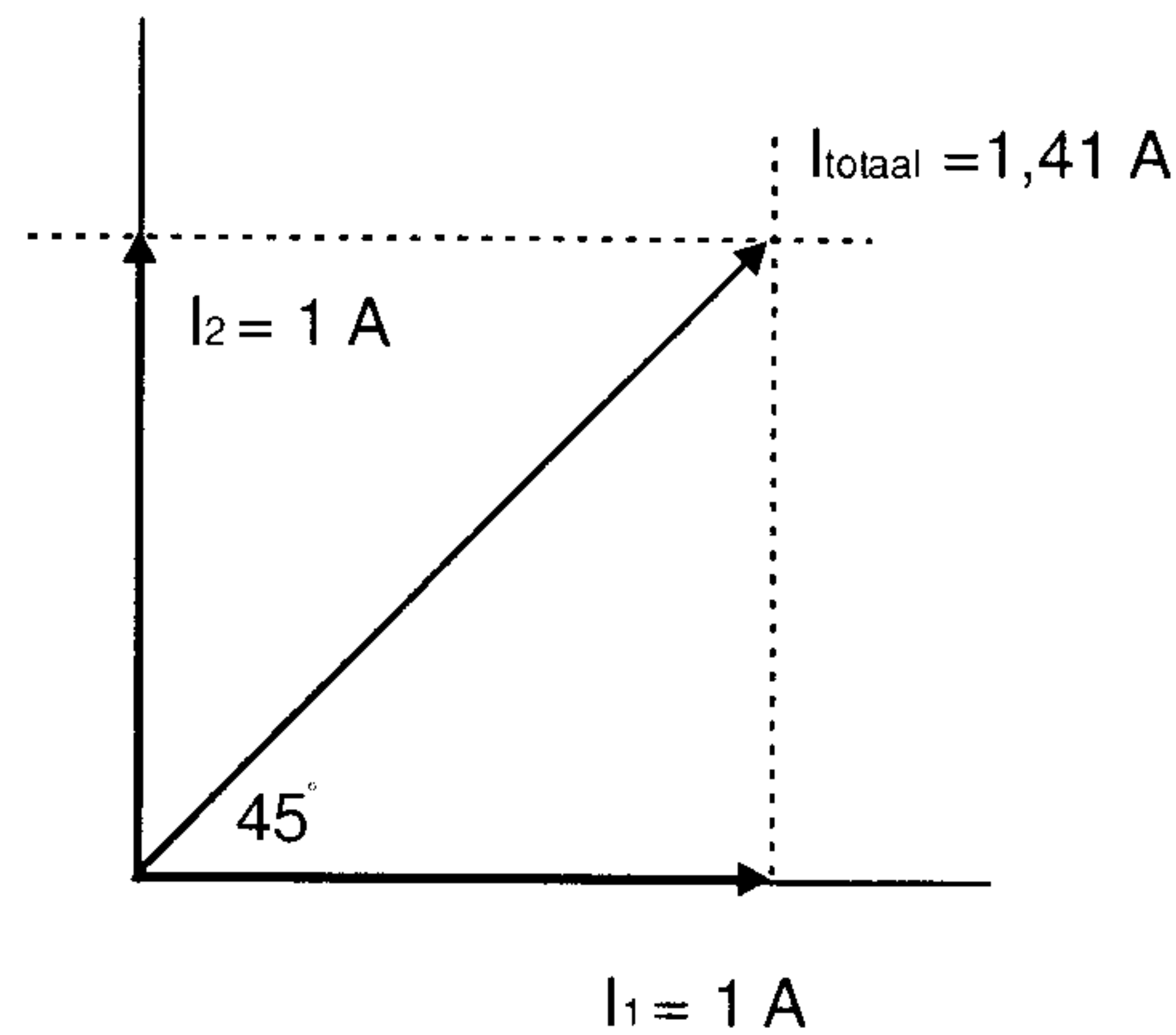
Wat gebeurt er wanneer we een sinusvormige spanning aansluiten op een elektrische schakeling waarin de wet van Ohm geldt (een zogenaamd lineair netwerk). Als gevolg van de aangesloten spanningsbron gaat er in de schakeling een aantal stromen vloeien en ontstaan er diverse deelspanningen. Al die stromen en spanningen zijn op hun beurt ook weer sinusvormig en hebben bovendien dezelfde frequentie als de aangesloten spanningsbron. De vectoren die deze spanningen en stromen voorstellen draaien dus allemaal met dezelfde snelheid (beter is: cirkelfrequentie) tegen de wijzers van klok in. De hoeken tussen de vectoren onderling veranderen daardoor niet. Uiteraard zijn die hoeken gelijk aan het fase verschil tussen de desbetreffende stromen en spanningen. Van nu af aan noemen we die hoek dan ook de fasehoek.



Figuur 4.3.6 De omgekeerde sinusconstructie. Punt S doorloopt de sinuslijn. Tegelijkertijd beschrijft punt Q en daarmee de vector MQ een cirkel. Daarom mogen we een sinusvormig signaal voorstellen door draaiende vector.



Figuur 4.3.7a Het optellen van twee stromen van 1 A met een faseverschuiving van 90°. De momentele waarde van I_t ten tijde t_1 (lijnstuk OC) vindt men door de momentele waarden van I_1 (lijnstuk OB) en I_2 (lijnstuk OA) op te tellen. Door dit proces voor een groot aantal tijdstippen te herhalen kan men de grafiek van I_t tekenen. De amplitude van I_t blijkt 1.41 A te zijn.



Figuur 4.3.7b Het optellen van twee stromen m.b.v. een vectordiagram. De lengte van de vectoren I_1 en I_2 in figuur 4.3-7b is gelijk aan de amplitude van I_1 en I_2 in figuur 4.3-7a. Meet de lengte van I_1 op in figuur 4.3-7b en vergelijk dit met de amplitude van I_1 in figuur 4.3-7a. Het vectordiagram voorspelt een faseverschuiving van 45° . Welke fase verschuiving lees je af in figuur 4.3-7a?

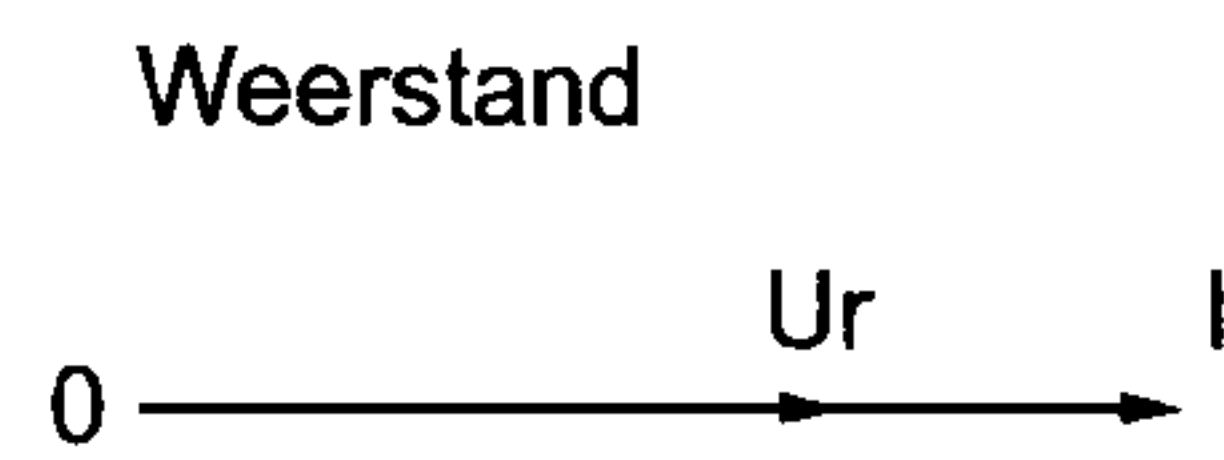
De vectordiagrammen die we in het volgende hoofdstuk gaan tekenen moet je opvatten als een momentopname van een figuur die in werkelijkheid met de cirkelfrequentie ronddraait. Daarbij hebben we de foto af gedrukt op het moment dat een geschikte vector toevallig naar rechts wijst. Figuur 4.3-7 geeft een indruk van de tijdbesparing welke we met vectoren kunnen bereiken. In figuur 4.3-7a zijn twee stromen getekend met een amplitude van 1 A en een faseverschil van 90° . Figuur 4.3-7b geeft het bijbehorende vectordiagram. Wat is nu de resultante van die twee stromen? Uit figuur 4.3-7b volgt voor I_1 een waarde van 1.41 A en een faseverschuiving van 45° t.o.v. I_1 (ga dat na!). Hoe moeten we zo iets aanpakken als we de vector-methode niet kenen? We zouden de sinuslijnen van figuur 4.3-7a punt voor punt bij elkaar kunnen optellen en door die nieuwe punten weer een sinus lijn trekken. Dat is echter een uiterst bewerkelijk proces, terwijl we met het vectordiagram in een handomdraai klaar zijn.

4.4 Basisdiagrammen

Om de toestand in een elektrisch netwerk te vertalen in een vectordiagram maken we gebruik van drie basis-diagrammen: namelijk die van de weerstand, de spoel en de condensator. Daarmee wordt het diagram van ingewikkeldere schakelingen opgebouwd.

Weerstand

Voorlopig kiezen we de stroomvector als nulrichting, dus horizontaal naar rechts. Bij een weerstand zijn spanning en stroom in fase. Anders gezegd: het faseverschil is nul. De spanningsvector valt daarom over de stroomvector.

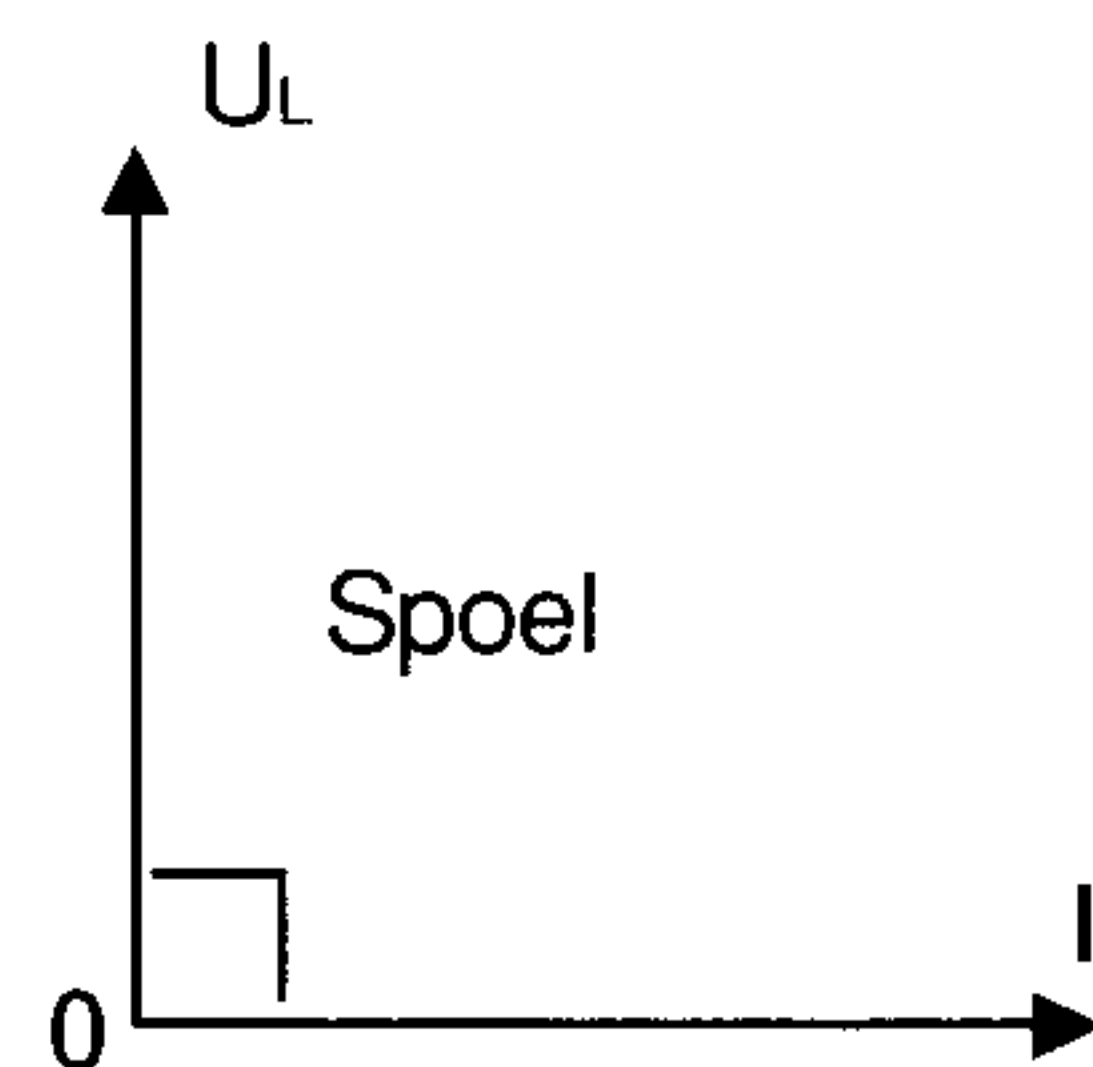


Figuur 4.4.1a

Spoel

(figuur 4.4-1b)

Uit paragraaf 4.2. weten we nog, dat de spanning bij een verliesvrije spoel 90° voorijlt op de stroom. In figuur 4.4.1b wordt U_L daarom vertikaal omhoog getekend: linksdraaiend passeert eerst de spanning U_L en dan pas de stroom I_L .

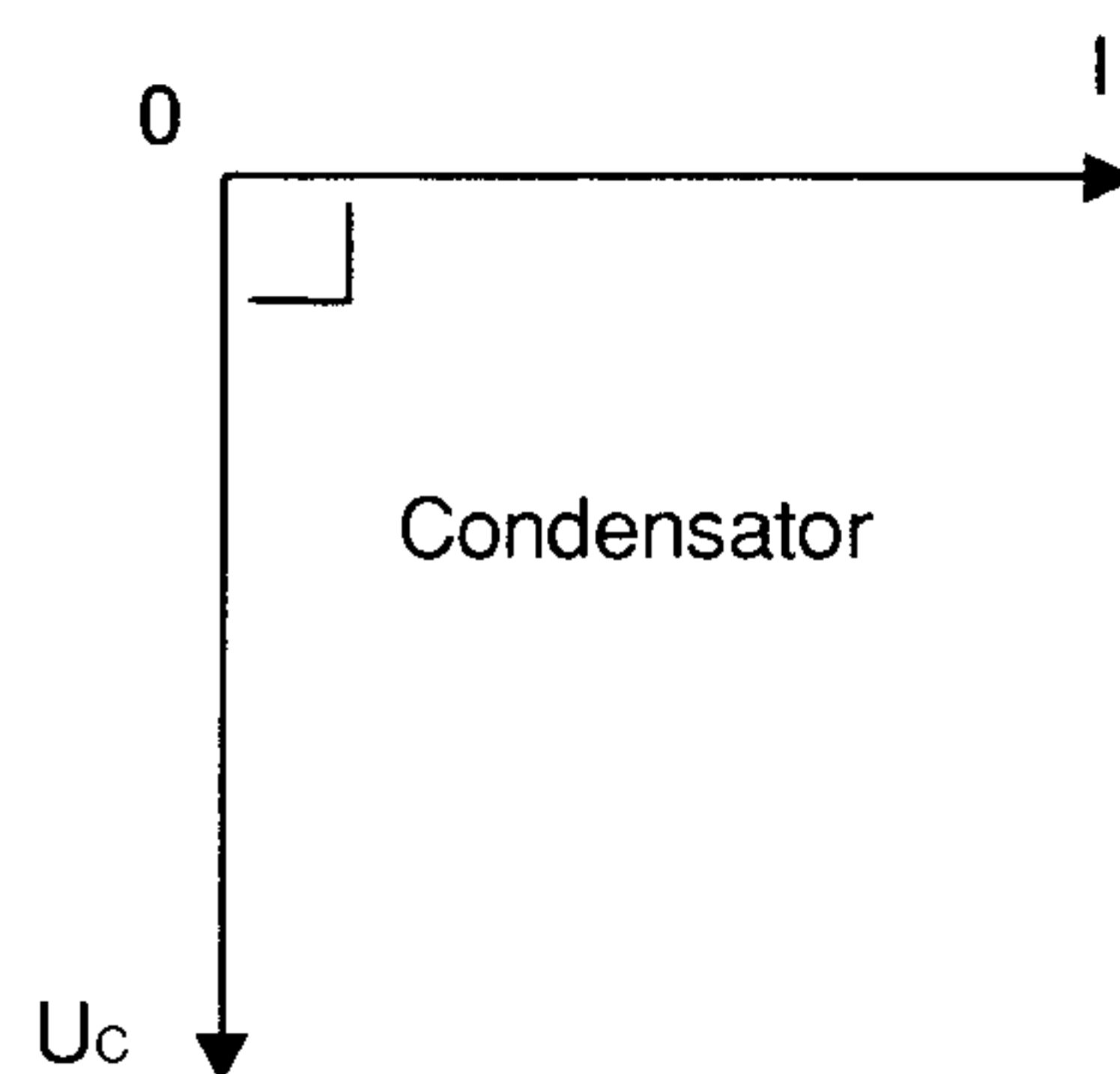


Figuur 4.4.1b

Condensator

(figuur 4.4-1c)

In dezelfde paragraaf leerden we dat de condensatorspanning 90° na ijlft op de stroom. In figuur 4.4-1c wordt U_C daarom naar beneden getekend, juist tegenovergesteld aan U_L want het faseverschil tussen U_L en U_C is $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.



Figuur 4.4.1c

Met deze basisdiagrammen voor de weerstand, de spoel en de condensator gaan we de diagrammen van meer ingewikkelde schakelingen opbouwen.

Ezelsbruggetje

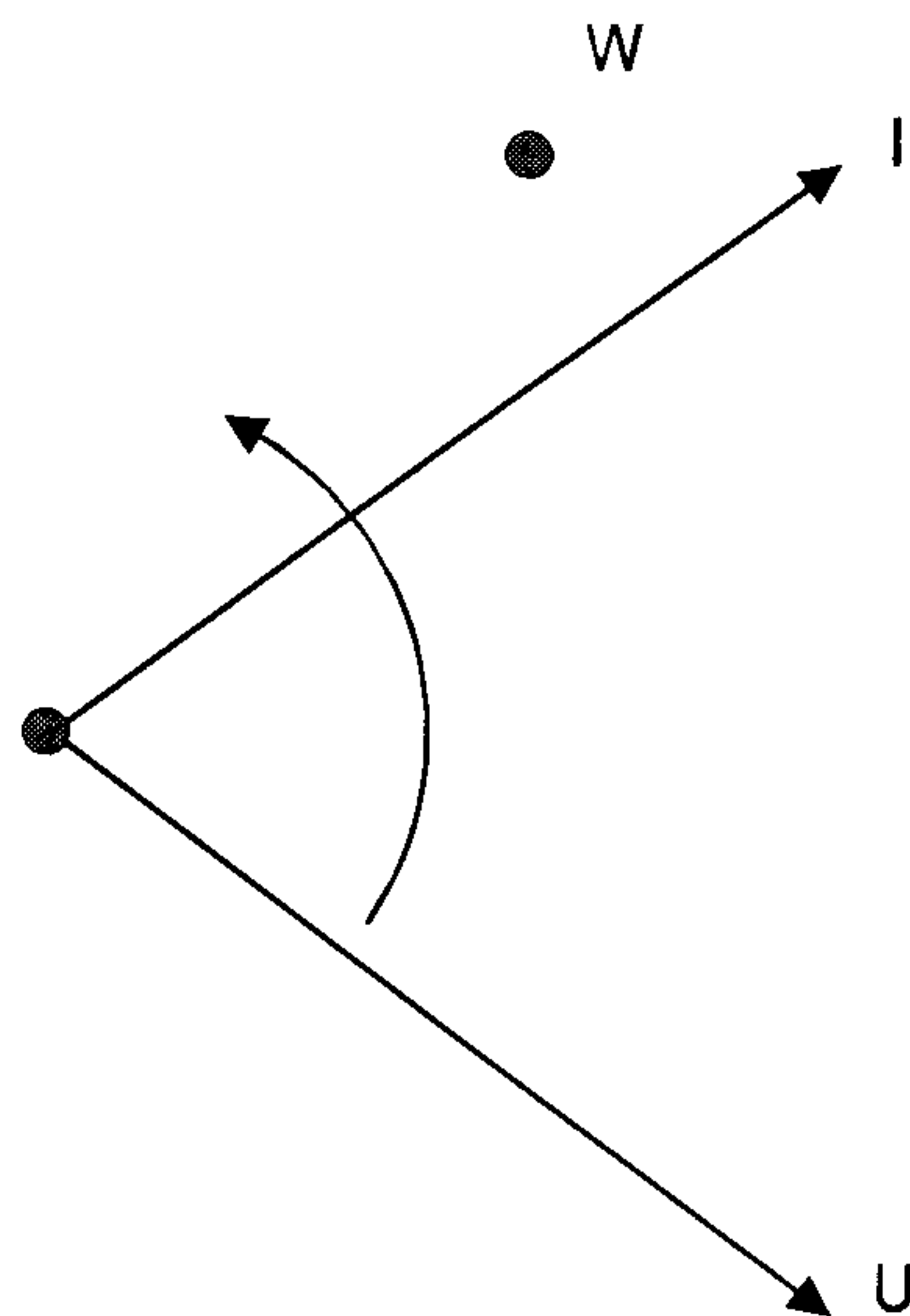
In het begin hebben we wat moeite met de begrippen voor- en naïjlen van stroom of spanning in een vectordiagram. Het volgende helpt ons om het beter te onthouden:

LEICIE

Dat wil zeggen, bij de spoel (L) eerst de spanning (E) en dan de stroom (I); bij de condensator (C) eerst de stroom (I) en dan de spanning (E). Daarbij moeten we goed in de gaten houden dat wij als stilstaande waarnemer kijken naar een diagram dat tegen de wijzers van de klok in draait. De vector I ijlt dus voor op de vector U . Zie figuur 4.4 2.

Speciaal voor dit ezelsbruggetje gebruiken we nog even de oude schrijfwijze voor spanning, de E . LEICIE is makkelijker te onthouden dan LUICIU.

Bij het opbouwen van een vectordiagram kan het voorkomen dat de basis diagrammen niet direkt bruikbaar zijn. Bijvoorbeeld omdat de stroom een andere richting heeft dan in figuur 4.4-1a t/m 4.4-1c is aangenomen. De consequentie van het voorgaande is dat we een basisdiagram in gedachten mogen uitknippen en net zo lang ronddraaien tot dat het in onze tekening past.



Figuur 4.4-2 De stilstaande waarnemer W kijkt naar het (tegen de wijzers van de klok in) draaiende vectordiagram. Hij ziet eerst I en dan U voorbij komen. I ijlt dus voor op U .

4.4.1 Vectordiagram van een serieschakeling

Bij een serieschakeling vloeit in de hele keten één en dezelfde stroom I . Daarom kiezen we I als nulrichting voor ons vectordiagram (figuur 4.4-3b). Vervolgens wordt U_R in fase met I (diagram 4.4-1a) en U_L loodrecht omhoog getekend (diagram 4.4-1b past meteen). Uit figuur 4.4-3a volgt dat de totale

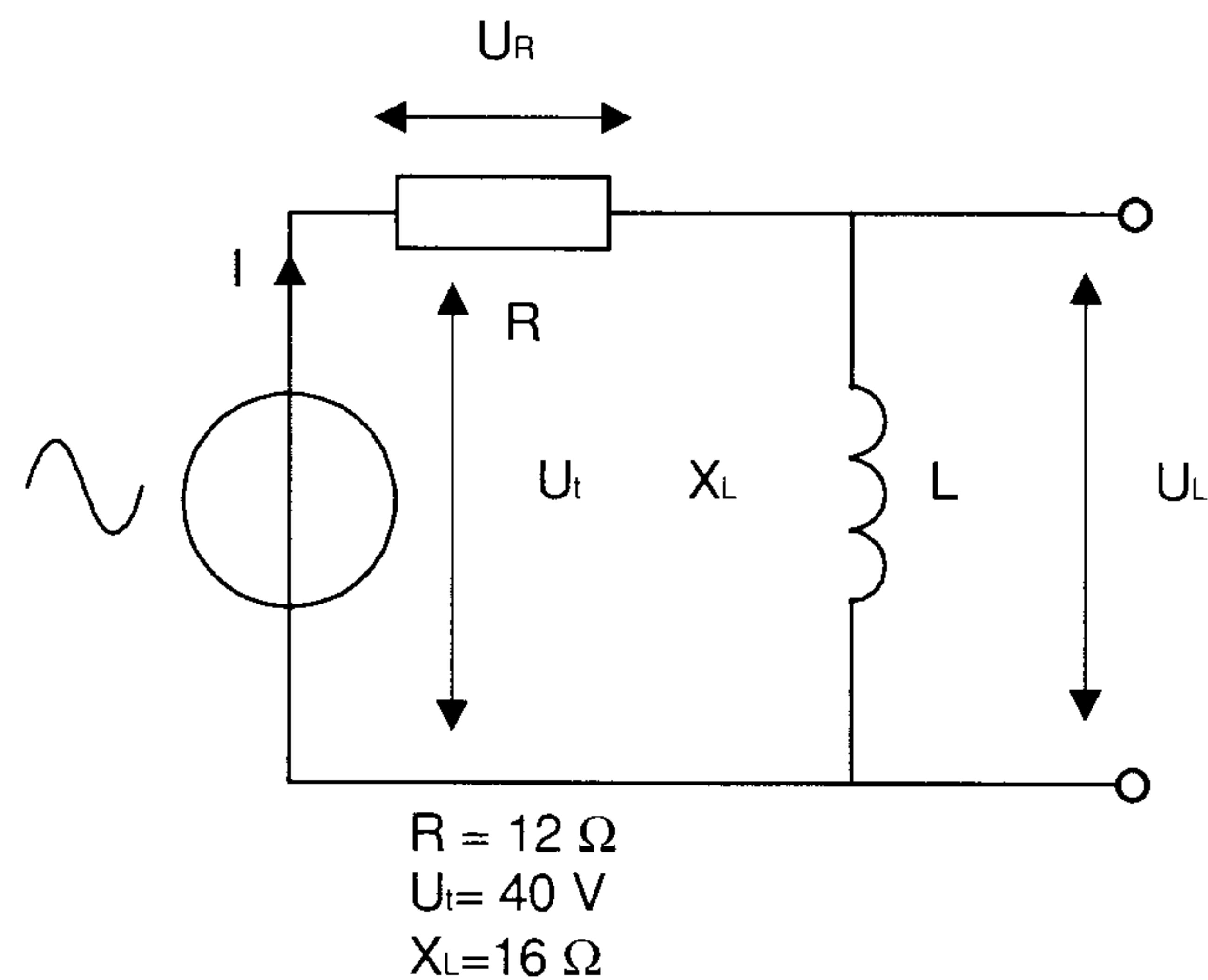
spanning U_t gelijk is aan de vectorsom van U_L en U_R . Door de rechthoek OABC af te maken vinden we de vector U_t gemakkelijk: dat is de diagonaal OB. We willen nu graag weten hoe groot de totale impedantie Z_t , I , U_L en U_t zijn. We hebben al opgemerkt dat:

$$U_t = U_R + U_L \quad (1)$$

Door de Wet van Ohm op de onderdelen afzonderlijk toe te passen, kunnen we ook schrijven:

$$I \cdot Z_t = I \cdot R + I \cdot U_L \quad (2)$$

We kunnen dus ook een vectordiagram voor de impedanties tekenen. Dat levert een gelijkvormige figuur op aangezien ze, op de constante factor I na, gelijk zijn aan de overeenkomstige spanningen. Bij het tekenen van die figuur mogen we de schaalfactor (zeg maar het aantal Ω/cm) zelf kiezen. Bij voorbeeld: zodanig dat X_L gelijk wordt aan U_L . Op grond van gelijkvormigheid zijn R en Z_t dan gelijk aan U_R en U_t .



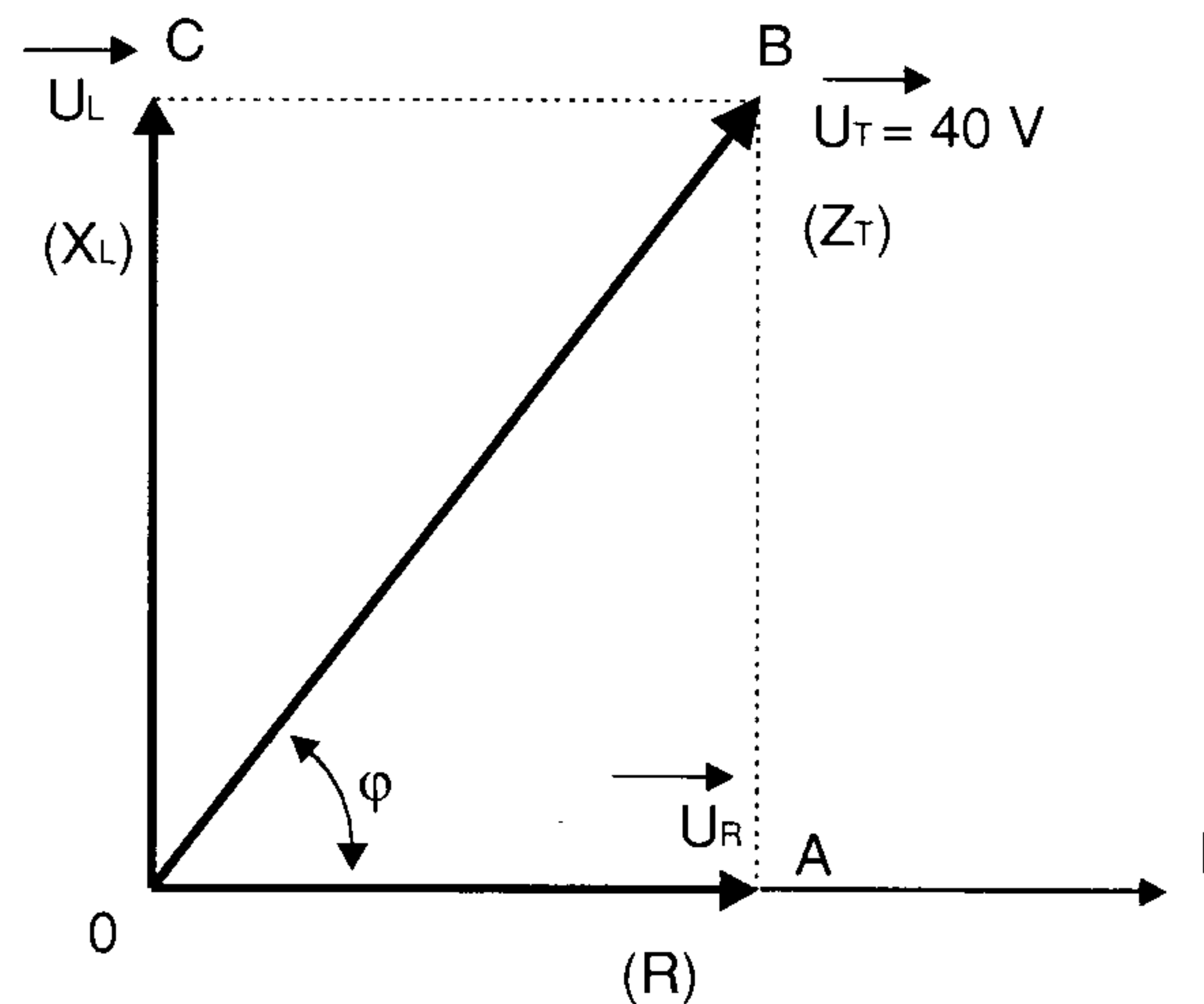
Figuur 4.4-3a Serieschakeling van weerstand en spoel

Conclusie: In het vectordiagram van een serieschakeling mogen we in plaats van de spanningsvectoren ook even lange impedantievectoren tekenen. Dat is in figuur 4.4-3b tussen haakjes aangegeven. Daarom kunnen we Z_t ook met de stelling van Pythagoras berekenen:

$$Z_t = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{400} = 20 \Omega$$

Merk overigens op, dat hier de 3-4-5 verhouding is gebruikt, maar dan 4 keer zo groot. Veel sneller gaat het aldus:

$$Z_t = 4 \times 5 = 20 \Omega$$



Figuur 4.4-3b Vectordiagram van de serie schakeling uit figuur 4.4-3a. De stroom I loopt zowel door R als L ; er is maar één stroom. Daarom wordt I horizontaal naar rechts getekend.

Volgens de Wet van Ohm geldt:

$$I = \frac{U_t}{Z_t} = \frac{40}{20} = 2 \text{ A}$$

Om U_L en U_R te vinden passen we de Wet van Ohm toe op de onderdelen afzonderlijk:

$$U_L = I \cdot X_L = 2 \cdot 16 = 32 \text{ V}$$

$$U_R = I \cdot R = 2 \cdot 12 = 24 \text{ V}$$

Controle: U_L en U_R moeten samen gelijk zijn aan U_t . Echter $32 + 24 = 56$ en niet 40 ! Hebben we dan toch ergens een fout gemaakt? Nee, het verschil zit in het fase verschil, zoals ook getoond in figuur 4.3-7a. Om met dit fase verschil rekening te houden gebruiken we juist vectoren, dus botweg (rekenkundig) optellen als $32+24=56$ mag helemaal niet.

Het heeft niet veel zin om dit vraagstuk uit het hoofd te leren, maar het recept van de vector optelling moet je blindelings kunnen uitvoeren. In dit recept zitten 3 stappen:

Stap 1: Bereken Z_t met behulp van het vectordiagram.

Stap 2: Bereken I met $I = \frac{U_t}{Z_t}$.

Stap 3: Pas de Wet van Ohm toe op elk onderdeel afzonderlijk.

Wanneer in een schakeling meerdere spanningen werkzaam zijn dan moeten we eerst nog een stap vooraf uitvoeren: Stap 0.

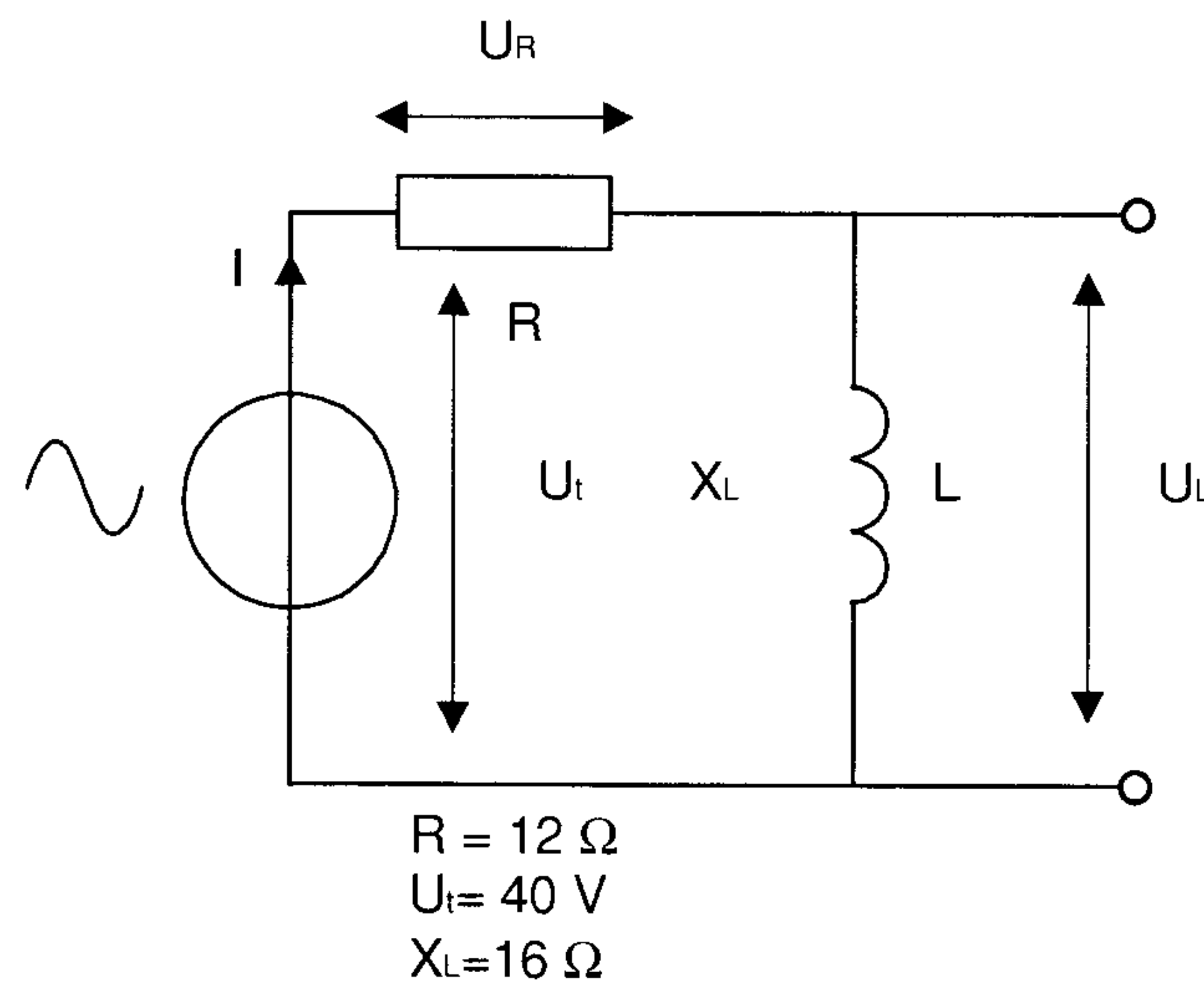
spanning U_t gelijk is aan de vectorsom van U_L en U_R . Door de rechthoek OABC af te maken vinden we de vector U_t gemakkelijk: dat is de diagonaal OB. We willen nu graag weten hoe groot de totale impedantie Z_T , I , U_L en U_t zijn. We hebben al opgemerkt dat:

$$U_t = U_R + U_L \quad (1)$$

Door de Wet van Ohm op de onderdelen afzonderlijk toe te passen, kunnen we ook schrijven:

$$I \cdot Z_T = I \cdot R + I \cdot U_L \quad (2)$$

We kunnen dus ook een vectordiagram voor de impedanties tekenen. Dat levert een gelijkvormige figuur op aangezien ze, op de constante factor I na, gelijk zijn aan de overeenkomstige spanningen. Bij het tekenen van die figuur mogen we de schaalfactor (zeg maar het aantal Ω/cm) zelf kiezen. Bij voorbeeld: zodanig dat X_L gelijk wordt aan U_L . Op grond van gelijkvormigheid zijn R en Z_T dan gelijk aan U_R en U_t .



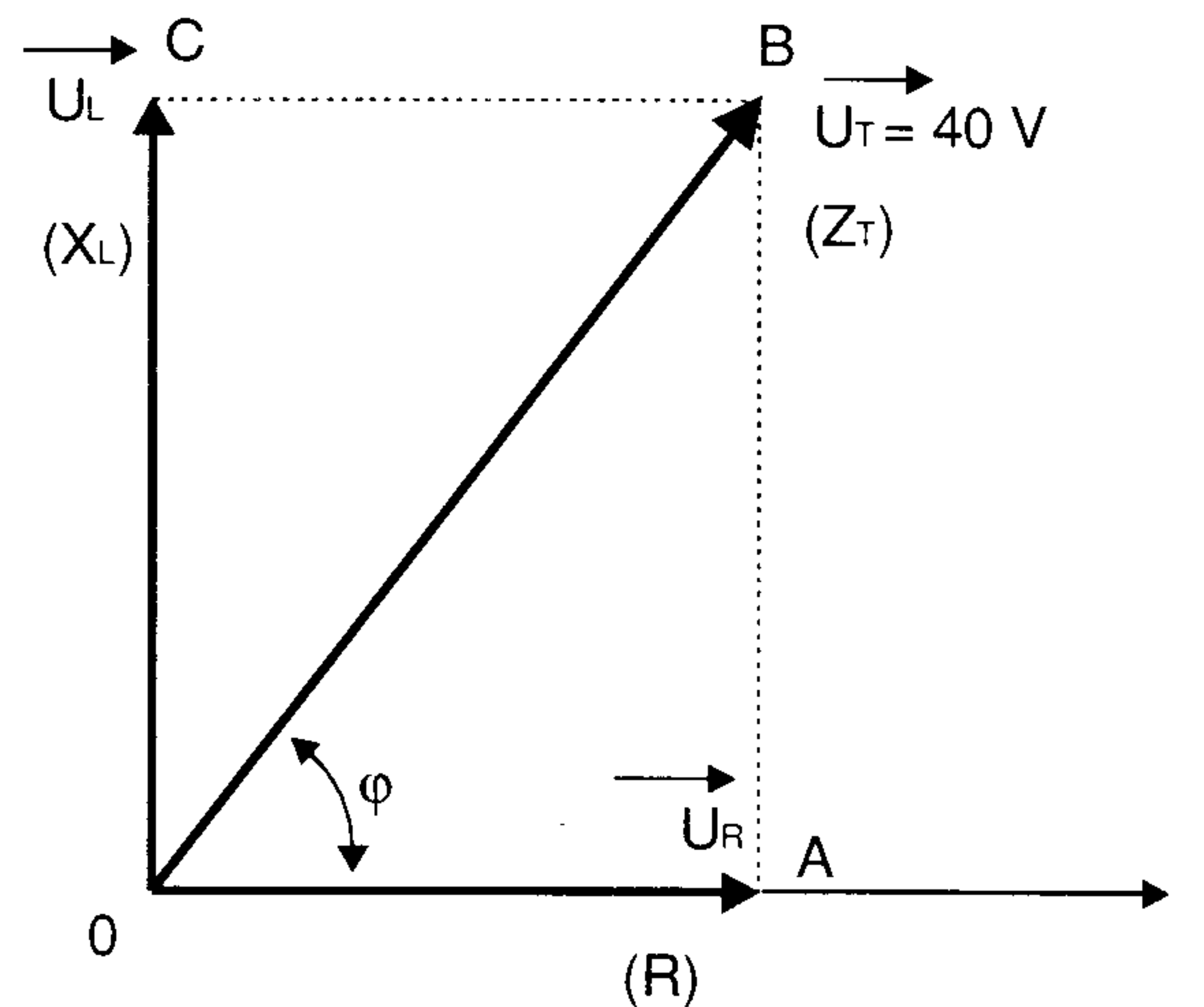
Figuur 4.4-3a Serieschakeling van weerstand en spoel

Conclusie: In het vectordiagram van een serieschakeling mogen we in plaats van de spanningsvectoren ook even lange impedantievectoren tekenen. Dat is in figuur 4.4-3b tussen haakjes aangegeven. Daarom kunnen we Z_T ook met de stelling van Pythagoras berekenen:

$$Z_T = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{400} = 20 \Omega$$

Merk overigens op, dat hier de 3-4-5 verhouding is gebruikt, maar dan 4 keer zo groot. Veel sneller gaat het aldus:

$$Z_T = 4 \times 5 = 20 \Omega$$



Figuur 4.4-3b Vectordiagram van de serie schakeling uit figuur 4.4-3a. De stroom I loopt zowel door R als L ; er is maar één stroom. Daarom wordt I horizontaal naar rechts getekend.

Volgens de Wet van Ohm geldt:

$$I = \frac{U_t}{Z_t} = \frac{40}{20} = 2 \text{ A}$$

Om U_L en U_R te vinden passen we de Wet van Ohm toe op de onderdelen afzonderlijk:

$$U_l = I \cdot X_l = 2 \cdot 16 = 32 \text{ V}$$

$$U_r = I \cdot R = 2 \cdot 12 = 24 \text{ V}$$

Controle: U_L en U_R moeten samen gelijk zijn aan U_t . Echter $32 + 24 = 56$ en niet 40 ! Hebben we dan toch ergens een fout gemaakt? Nee, het verschil zit in het fase verschil, zoals ook getoond in figuur 4.3-7a. Om met dit fase verschil rekening te houden gebruiken we juist vectoren, dus botweg (rekenkundig) optellen als $32+24=56$ mag helemaal niet.

Het heeft niet veel zin om dit vraagstuk uit het hoofd te leren, maar het recept van de vector optelling moet je blindelings kunnen uitvoeren. In dit recept zitten 3 stappen:

Stap 1: Bereken Z_t met behulp van het vectordiagram.

Stap 2: Bereken I met $I = \frac{U_t}{Z_t}$.

Stap 3: Pas de Wet van Ohm toe op elk onderdeel afzonderlijk.

Wanneer in een schakeling meerdere spanningen werkzaam zijn dan moeten we eerst nog een stap vooraf uitvoeren: Stap 0.

Stap 0: Bereken met een vectordiagram de totaal werkzame spanning U_r . (Gelukkig komt dat niet vaak voor.)

Tenslotte wordt gevraagd hoeveel vermogen de schakeling van figuur 4.4-3a uit de spanningsbron opneemt. In paragraaf 4.2. hebben we gezien dat er gemiddeld geen vermogen wordt opgenomen als U en I 90° uit fase zijn. In figuur 4.4-3b levert U_L geen bijdrage aan het vermogen. Dus moet het vermogen in zijn geheel naar de weerstand gaan, of te wel:

$$P = I \cdot U_R \text{ (formule 3), zodat:}$$

$$P = 2 \cdot 24 = 48 \text{ W}$$

We kunnen het ook anders bekijken. In figuur 4.4-3b geldt:

$$\cos \varphi = \frac{U_r}{U_t} \text{ zodat } U_r = \cos \varphi \cdot U_t$$

Door deze uitkomst in formule 3 in te vullen vinden we:

$$P = I \cdot U_t \cdot \cos \varphi \quad (4)$$

Hiermee hebben we deze formule die we eerder tegenkwamen, in de paragraaf over de arbeidsfactor, langs een omweggetje bewezen.

Opdracht 1

Bereken $\cos \varphi$ met de gegevens uit figuur 4.4-3a en vul dit in bij formule 4. Gebruik tevens de bekende waarde van U_t en de berekende waarde van I . Klopt deze uitkomst met ons eerste antwoord?

Opdracht 2

Teken het vectordiagram van de schakeling uit figuur 4.4-4 op schaal. Bereken Z_t , U_t , U_c en U_r . Bereken tevens de capaciteit van de condensator in μF als de cirkelfrequentie van de spanningsbron 417 rad/s bedraagt.

4.4.2 Vectordiagram van een parallelschakeling

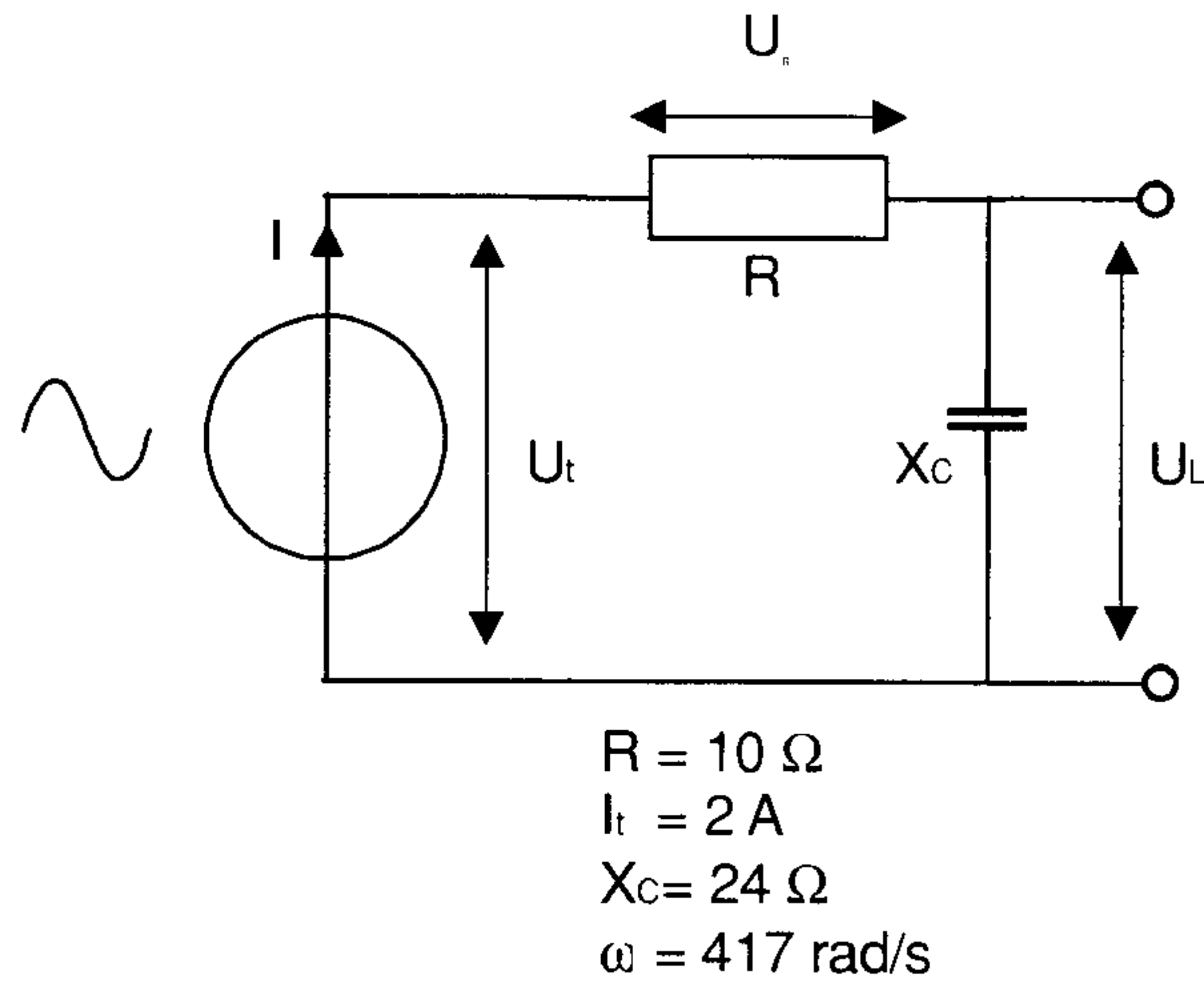
In een parallelschakeling heerst overal één en dezelfde spanning (figuur 4.4-5a). Daarom kiezen we U als nulrichting in figuur 4.4-5b. In fase met U vloeit I_R . Om I_C te tekenen moeten we basisdiagram 4.4-1c eerst een kwart slag draaien tot U_C horizontaal naar rechts wijst. I_C staat dan recht omhoog. Uiteraard is I_t de vectorsom van I_C en I_R . Met de Wet van Ohm vinden we:

$$I_C = \frac{U_t}{X_c} = \frac{120}{15} = 8 \text{ A en}$$

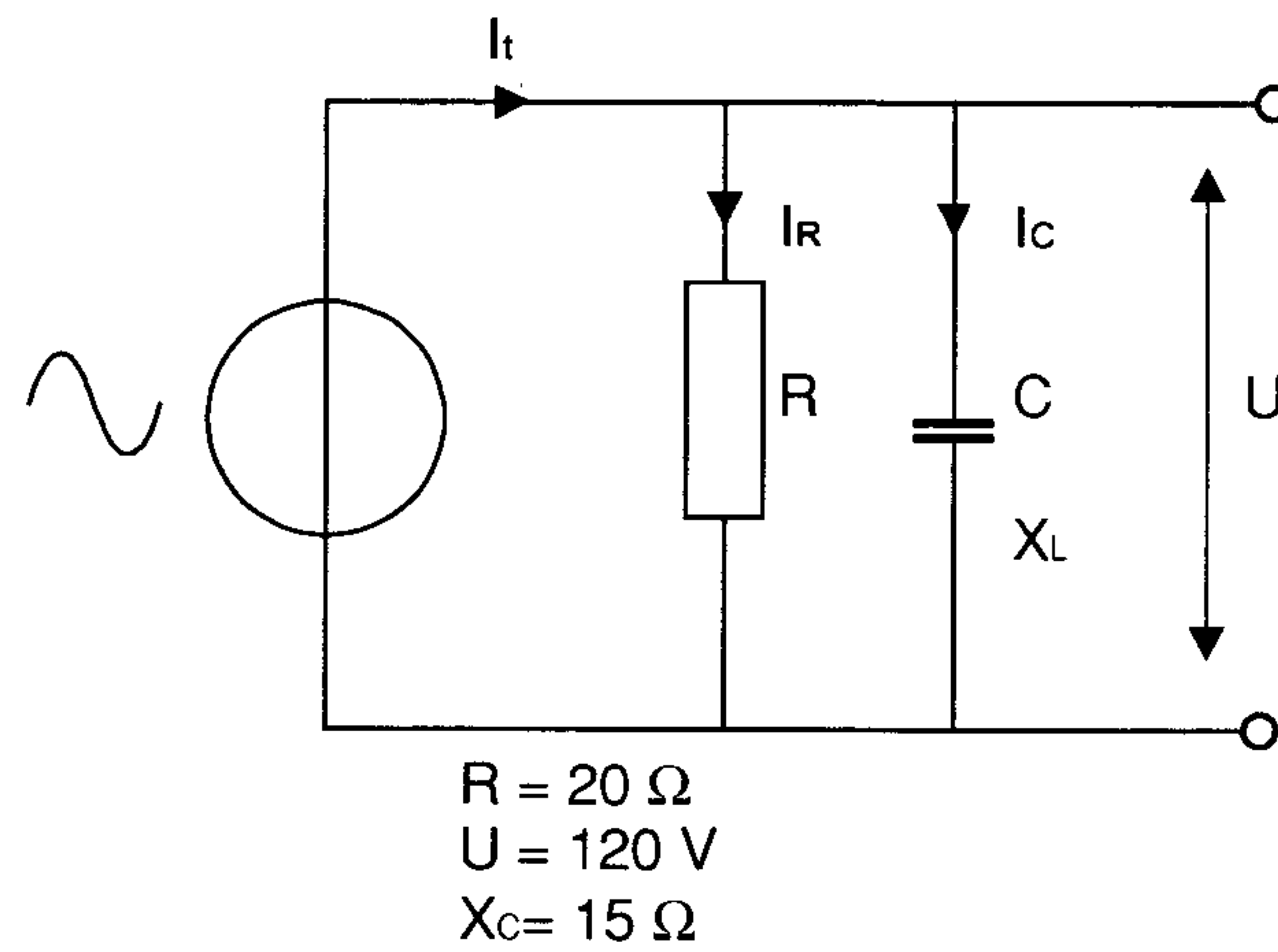
$$I_R = \frac{U_t}{R} = \frac{120}{20} = 6 \text{ A}$$

Zie je weer een (3-4-5) driehoek ontstaan? I_t is dan 10 A. De totale impedantie volgt uit:

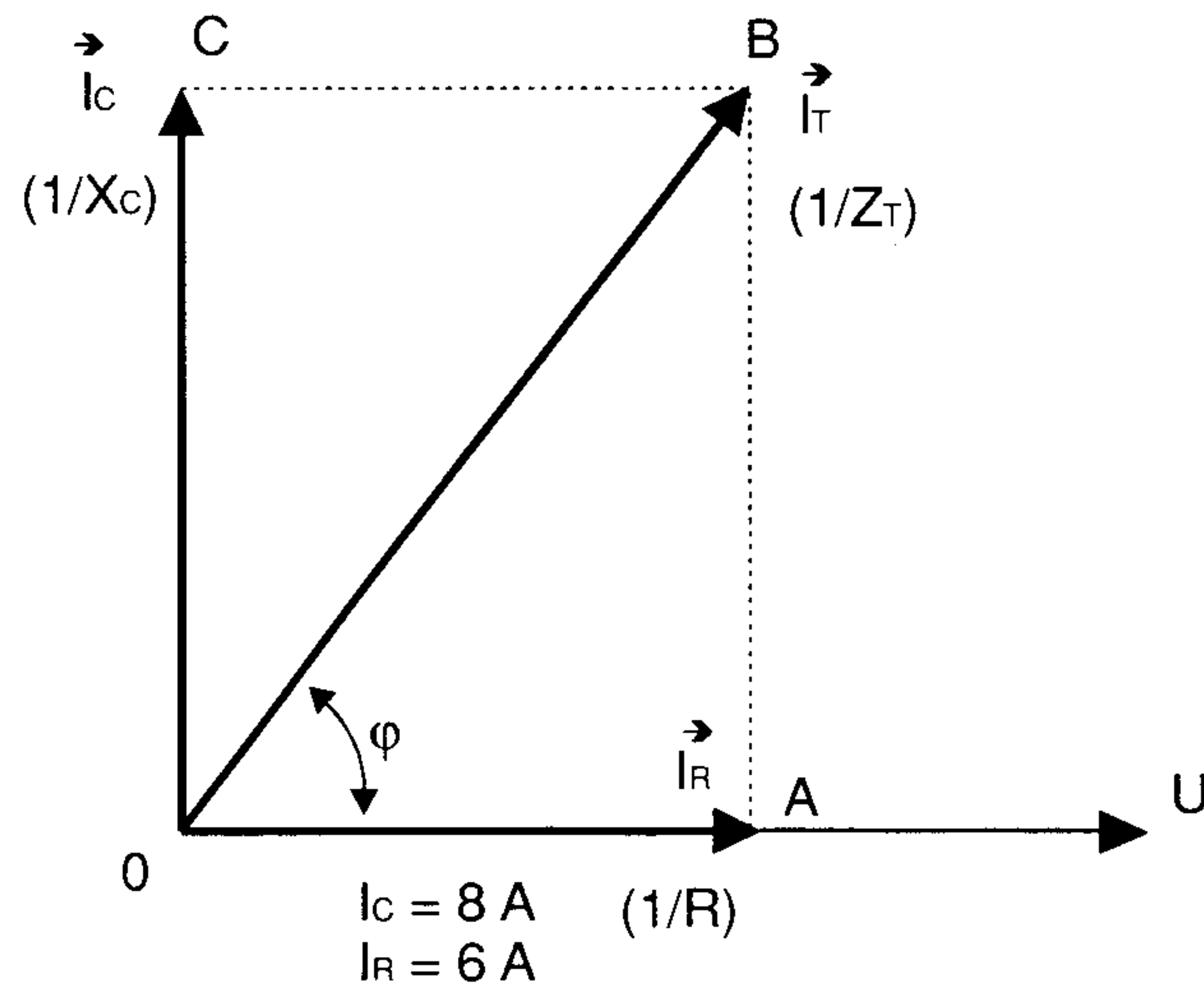
$$Z_R = \frac{U}{I_t} = \frac{120}{10} = 12 \Omega$$



Figuur 4.4.4



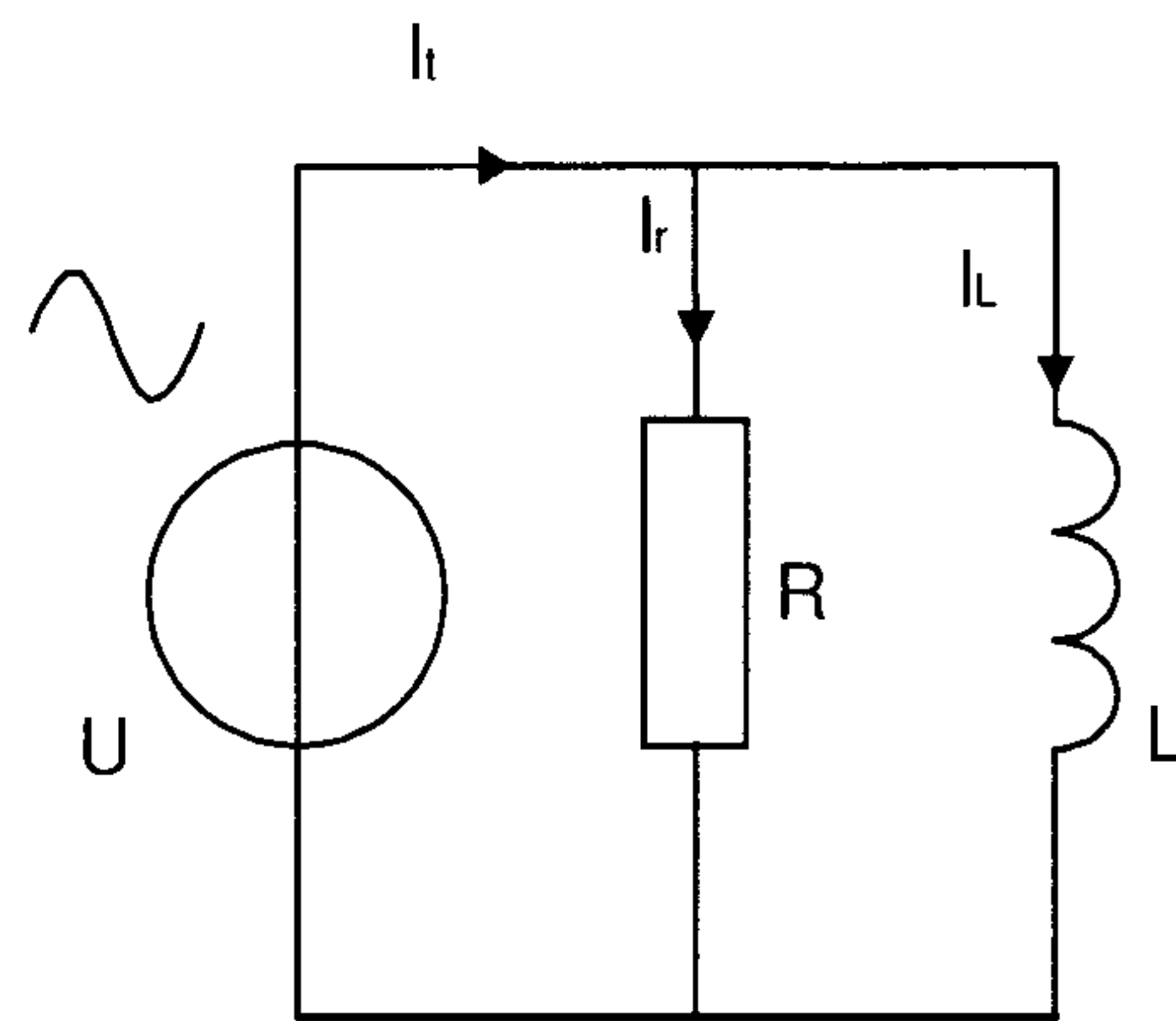
Figuur 4.4.5a



Figuur 4.4 5b

Aangezien de stroom omgekeerd evenredig is met de impedantie waardoor deze stroom vloeit, mogen we in het vectordiagram van een parallelschakeling naast de stroomvectoren, ook het omgekeerde van de impedantie schrijven. Op grond van het vectordiagram geldt daarom:

$$\frac{1}{Z_t} = \sqrt{\frac{1}{X_c^2} + \frac{1}{R^2}} \quad \text{(formule 5)}$$



U = 30 V I_R = ?
 R = 15 I_L = ?
 I_t = 2,5 A X_L = ?

Figuur 4.4.6

Opdracht 3

Ga na of deze formule dezelfde uitkomst oplevert door de waarden van X_C en R uit figuur 4.4-5a in te vullen. Daar formule 5 het omgekeerde van Z_t

oplevert moeten we na het worteltrekken nog op de I/X toets van de rekenmachine drukken.

Opdracht 4

Teken het vectordiagram van de schakeling uit figuur 4.4-6 en bereken I_R , I_L , X_L en Z_t . Aanwijzing: met een spanning van 30 V en een weerstand van 15Ω volgt voor I_R hoeveel Ampère? Voor de stromen geldt:

$$I_t^2 = I_R^2 + I_L^2 \text{ of}$$

$$I_L^2 = I_t^2 - I_R^2$$

X_L volgt uit de berekening:

$$X_L = \frac{U}{I_L}$$

We kunnen ook eerst Z_t berekenen met:

$$Z_t = \frac{U}{I_t} = ? \Omega$$

Uit het vectordiagram volgt:

$$\frac{1}{Z_t^2} = \frac{1}{X_L^2} + \frac{1}{R^2}$$

$$\frac{1}{X_L^2} = \frac{1}{Z_t^2} - \frac{1}{R^2} \text{ dus } X_L = ? \Omega$$

4.5 Resonantie

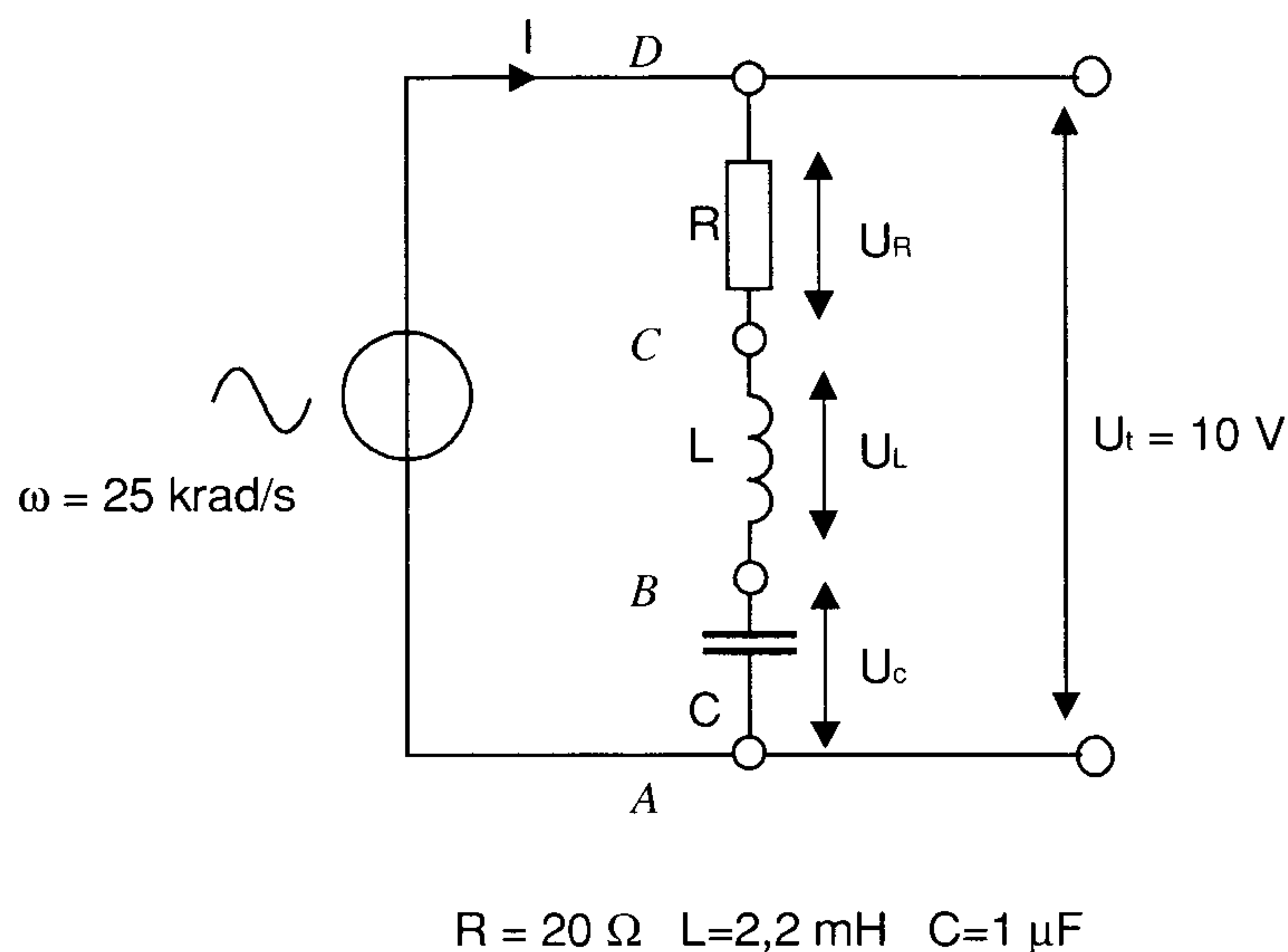
Inleiding

In deze paragraaf bekijken we de eigenschappen van de serie- en parallel-schakeling van spoel, condensator en weerstand, kortweg resonantie- of afstemkringen. De spoelen en condensatoren zijn volkomen ideaal. Alle verliezen zijn geconcentreerd in de serie- of parallelweerstand. Dat we in deze paragraaf druk gebruik maken van vectordiagrammen spreekt vanzelf. Er komen ook de nodige formules aan te pas. De afleidingen zijn voor het examen niet noodzakelijk maar de uitkomsten (voorzien van een *) moeten geleerd worden.

4.5.1 Serieschakeling

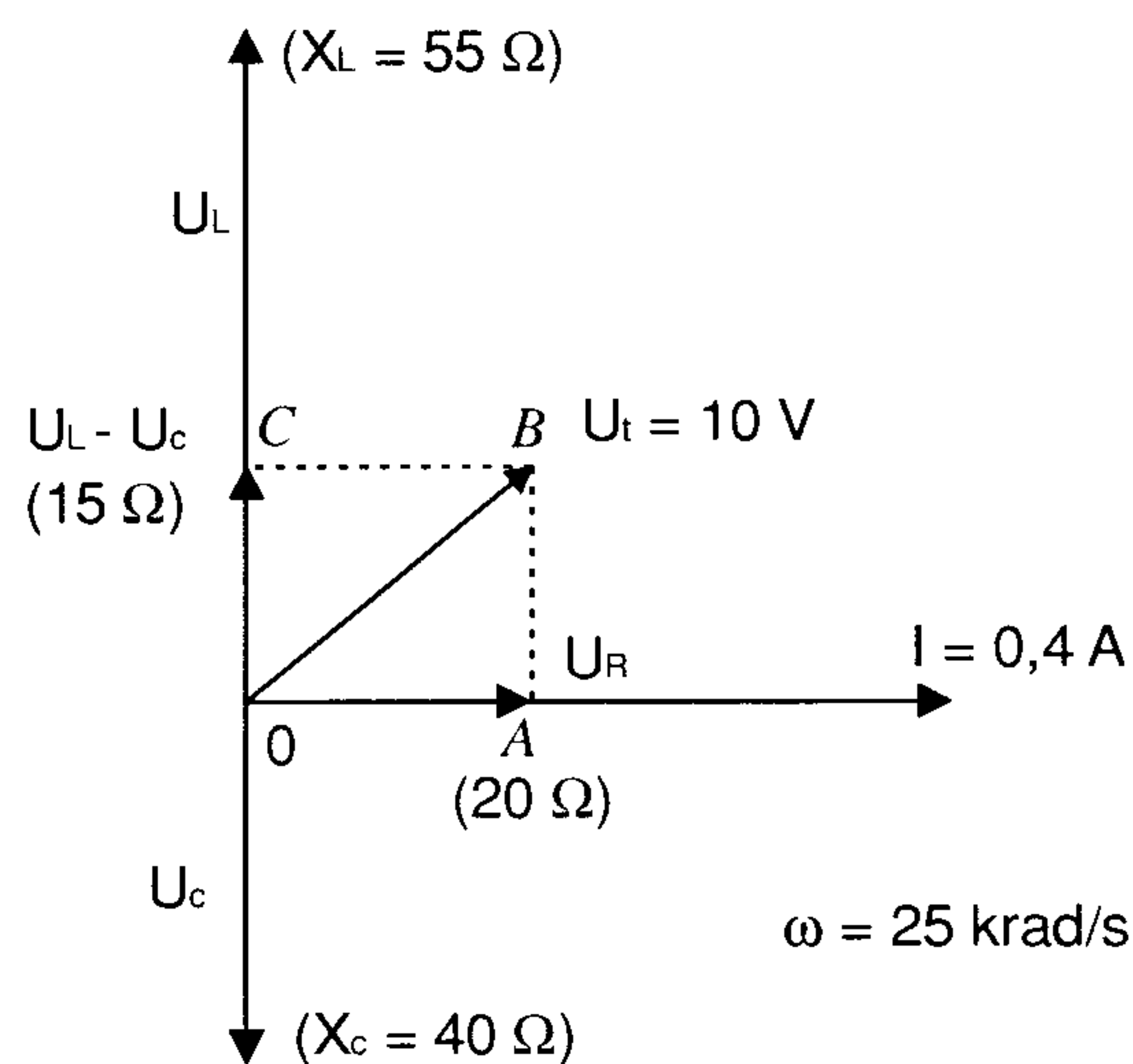
Figuur 4.5-1 geeft het schema van de seriekring weer. De opzet van het vectordiagram (figuur 4.5-2a en 4.5-2b) verloopt als volgt: Het is een serieschakeling en dus tekenen we de stroomvector naar rechts. In fase met I

tekenen we U_R . De richting van U_L en U_C kunnen we gemakkelijk controleren met behulp van de basisdiagrammen of het ezelsbruggetje LEICIE.



Figuur 4.5-1. Serie schakeling van condensator en spoel.

De spanningsbron heeft een cirkelfrequentie van 25 krad/s. Met de gekozen waarden van L en C levert dat reactanties op van resp. 55Ω en 40Ω (reken dat na). In figuur 4.5-2a is één en ander tussen haakjes afgedrukt. Uit het diagram blijkt dat X_L en X_C elkaar tegenwerken (180° uit fase). Daarom bepalen we het verschil:



Figuur 4.5-2a Vectordiagram kring uit figuur 4.5 1 (inductief).

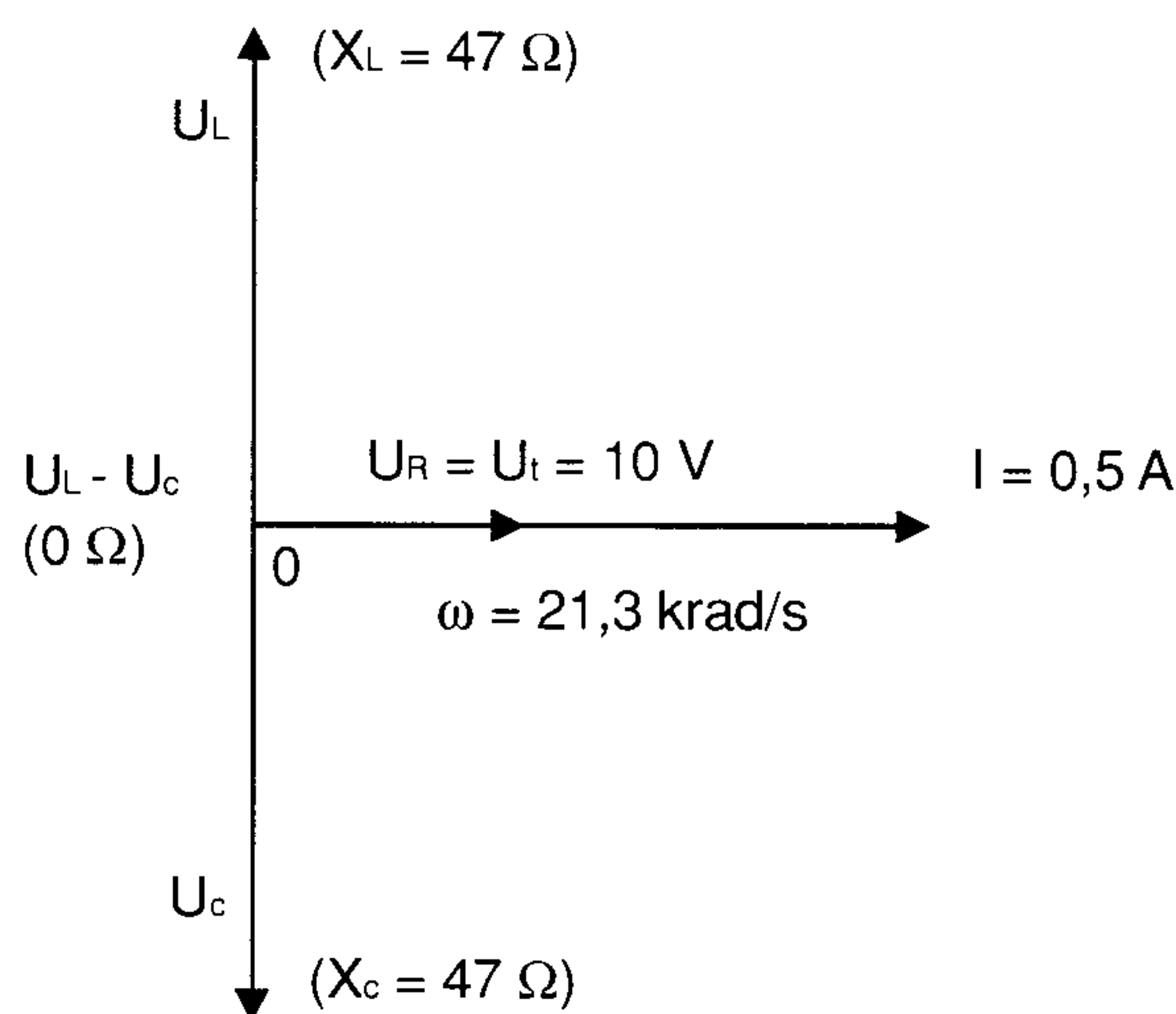
Men noemt de kring onder deze omstandigheden inductief omdat de L de grootste reactantie oplevert. De resulterende (inductieve) reactantie tellen we vectorisch op bij de waarde van R (20Ω), weer een 3-4-5 driehoek) en vinden $Z_t = 25 \Omega$. Daarmee komt de waarde van I op:

$$I = \frac{U}{Z_i} = \frac{10}{25} = 0,4 \text{ A}$$

Opdracht 1

Door op de onderdelen afzonderlijk de Wet van Ohm toe te passen, kunnen we de deelspanningen U_R , U_L en U_C berekenen. Probeer dat zelf.

Vervolgens maken we de frequentie van de bron wat lager. Daardoor wordt X_L evenredig kleiner. X_C verandert echter omgekeerd evenredig met ω en wordt dus groter (zie figuur 4.5-3). Het verschil tussen X_L en X_C wordt daardoor kleiner en de rechthoek OABC wordt steeds platter. Als $\omega = 21,3$ krad/s, dan X_L en X_C (vrijwel) gelijk aan 47Ω . Het verschil tussen X_L en X_C is daarmee nul geworden en de rechthoek is platgeslagen (figuur 4.5-2b). Dit nu is resonantie. Omdat X_L en X_C elkaar opheffen is $Z_i = R$ en is de kring als geheel zuiver Ohms.

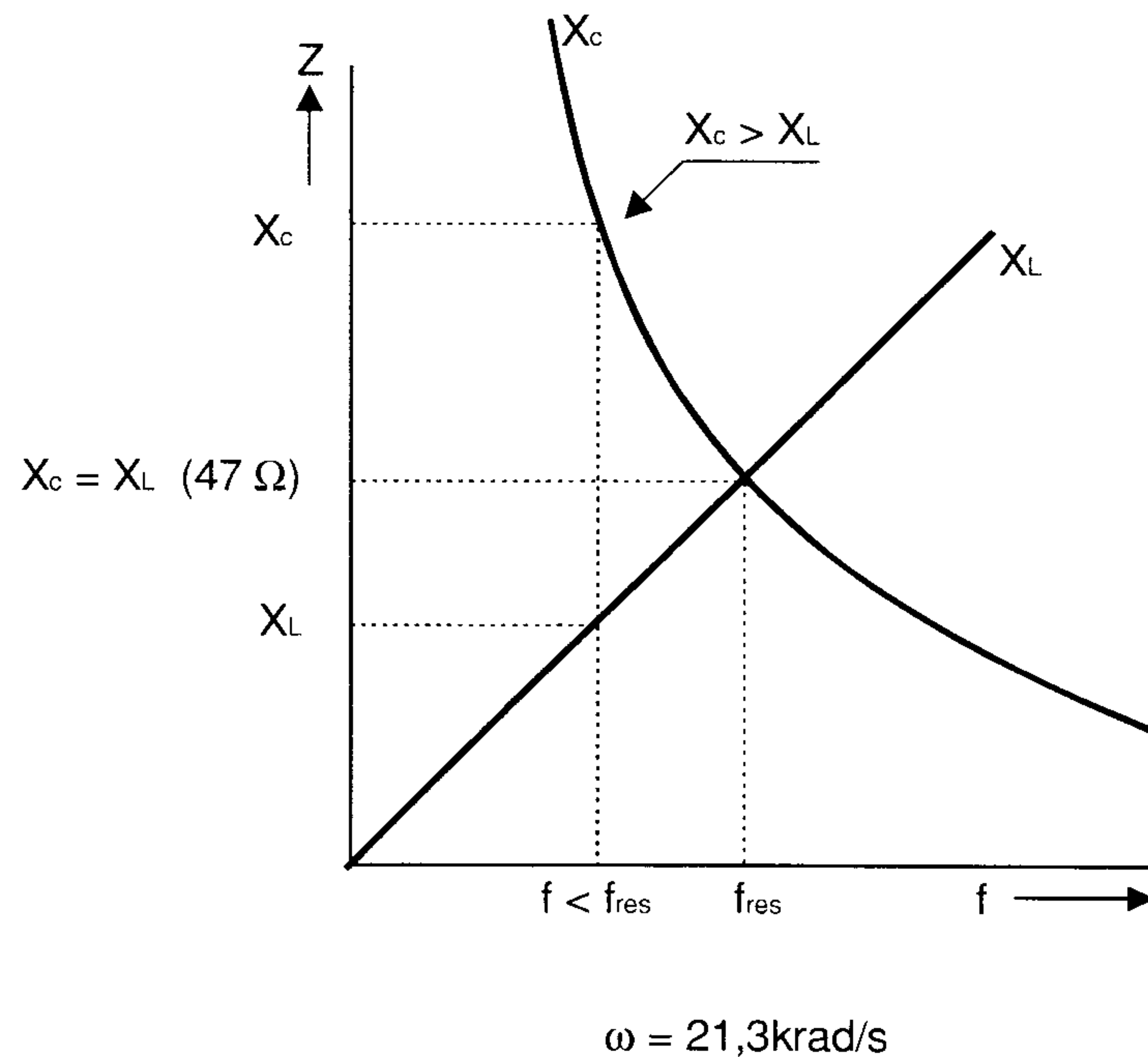


Figuur 4.5-2b Vectordiagram van dezelfde seriekring bij resonantie. Aangezien U_L en U_C gelijk zijn is $U_L - U_C = 0$. Daardoor verdwijnt de vector OC uit figuur 4.5 2a en wordt U_t gelijk aan U_R .

Opdracht 2

Bereken de waarde van I , U_R , U_L en U_C onder deze omstandigheden met behulp van het recept in opdracht 1.

(Antwoorden: 0,5 A, 10 V, 23,5 V en 23,5 V). In het begin zul je deze antwoorden waarschijnlijk met enige argwaan bekijken, immers U_R is gelijk aan de bronspanning en U_L en U_C zijn ruim twee maal zo groot! Dit verschijnsel wordt veroorzaakt door het feit dat U_L en U_C elkaar opheffen.



Figuur 4.5-3 De reactantie van spoel en condensator als functie van de frequentie. Op het snijpunt van beide lijnen geldt: $X_L = X_C$. Met andere woorden, de kring is in resonantie.

Daardoor wordt U_R automatisch gelijk aan U_I . Met een voltmeter, aangesloten tussen de punten A en B resp. B en C (figuur 4.5-1) wordt inderdaad 23,5 V gemeten. Meet men echter tussen A en C dan is het resultaat 0 volt! De serieschakeling van L en C vormt bij resonantie een kortsluiting. Men spreekt van spannings-opslinging wanneer U_C en U_L bij resonantie groter worden dan de bronspanning. De verhouding tussen U_L en U_I of U_C en U_I , (U_L en U_R zijn bij resonantie immers gelijk) noemt men de kwaliteitsfactor Q . In dit voorbeeld vinden we:

$$Q = \frac{U_L}{U_I} = \frac{23,5}{10} = 2,35$$

Wanneer we de frequentie nog lager maken dan zal X_C het winnen en gaat de kring zich capacitef gedragen.

Opdracht 3

Bereken X_L , X_C en Z_I wanneer $\omega = 18,2 \text{ krad/s}$. Bepaal tevens I en alle deelspanningen en teken het vectordiagram op schaal.

Formules

In het volgende lopen we de bovenstaande berekening stap voor stap na. Controleer bij de opdrachten steeds of het resultaat van de formules overeenstemt met de eerdere uitkomsten.

4.5.2 Impedantie

Door het verschil $X_L - X_C$ vectorisch bij R op te tellen volgt voor Z_i :

$$Z_i = \sqrt{(X_L - X_C)^2 + R^2} \quad (\text{formule 1})$$

Wanneer de kring capacitief is (X_C groter dan X_L) dan levert de term tussen haakjes een negatief getal op. Dit negatieve getal wordt vervolgens gekwadrateerd zodat er weer een positieve uitkomst ontstaat ($-$ maal $-$ is $+$). Formule 1 geeft daarom altijd een goede uitkomst.

Opdracht 4

Bereken Z_i door formule 1 toe te passen op de gegevens uit opdracht 3.

Door Z_i (met behulp van formule 1 voor een groot aantal frequenties uit te rekenen en de uitkomst grafisch uit te zetten) ontstaat de impedantiecurve van figuur 4.5-4. Omdat I omgekeerd evenredig is met Z_i (I groot: Z_i klein) is de stroomgrafiek (figuur 4.5-5) hieruit gemakkelijk af te leiden.

4.5.3 Resonantiefrequentie

Het criterium voor resonantie is: $X_L = X_C$. Met behulp van:

$$X_L = \omega \cdot L \quad \text{en} \quad X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \quad \text{volgt}$$

$$\omega \cdot L = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

Links en rechts vermenigvuldigen met ω levert:

$$\omega^2 \cdot L = \frac{1}{C}$$

Links en rechts delen door L :

$$\omega^2 = \frac{1}{L \cdot C}$$

Links en rechts worteltrekken: (formule 2)

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} \quad (\text{formule 2})$$

Vervangen van ω door $2\pi f$ geeft:

$$2\pi f = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} \quad (\text{formule 3})$$

zodat

$$f = \sqrt{\frac{1}{2\pi LC}} \quad (\text{formule van Thomson})$$

Opdracht 5

Bereken ω_{res} en f_{res} met behulp van de formules 2 en 3 en de gegevens uit figuur 4.5-1.

4.5.4 Q factor

Bij resonantie geldt: $U_R = U_L$. Daarom kunnen we voor Q ook schrijven:

$$Q = \frac{U_L}{U_R} = \frac{I \cdot X_L}{I \cdot R} = \frac{X_L}{R}$$

Of met behulp van $X_L = 2\pi fL$:

$$Q_s = \frac{2\pi fL}{R_s} \quad (\text{formule 4 *})$$

De index s is toegevoegd (betekent serie) om deze uitkomst te onderscheiden van de Q -factor van de nog te behandelen parallelkring. Leid een soortgelijke formule af met behulp van:

$$Q_s = \frac{U_C}{U_R} \quad (U_L = U_C \text{ bij resonantie})$$

Opdracht 6

Bereken Q_s met behulp van formule 4 en de gegevens uit figuur 4.5-1. Uit de definitie van Q_s volgt voor U_L en U_C bij resonantie:

$$U_L = Q_s \cdot U_i \quad \text{resp.} \quad U_C = Q_s \cdot U_i$$

Bereken hiermee U_L en U_C .

4.5.5 Bandbreedte

Afstemkringen worden onder andere gebruikt om bepaalde frequenties vrijwel onverzwakt door te laten en andere flink te sperren. Uit figuur 4.5-5 blijkt echter dat er geen scherpe grens bestaat waarbij het filter overgaat van doorlaat naar sper. Bij berekeningen hanteert men als grens de frequentie waarbij de stroom met een factor $\sqrt{2}$ is gedaald ten opzichte van het maximum (f_1 en f_2 in figuur 4.5-5). Het vermogen dat de weerstand dissipeert is dan met een factor 2 afgenomen, immers:

$$P = I^2 \cdot R = \left(\frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot R = \frac{I_{\max}^2 \cdot R}{2} = \frac{P_{\max}}{2}$$

In hoofdstuk 1 hebben we geleerd dat een vermogensafname met een factor 2 overeenkomt met 3 dB (eigenlijk -3 dB). Daarom spreekt men wel van de -3 dB punten of kantelpunten. Komt die factor $\sqrt{2}$ ons trouwens niet bekend voor? Juist, van vraag 8 en 9 uit paragraaf 4.4. Bij f_1 en f_2 ontstaat weer een vierkant vectordiagram. Men kan f_1 en f_2 derhalve berekenen uit:

$$X_L - X_C = R \quad (f_1, \text{ inductief) of}$$

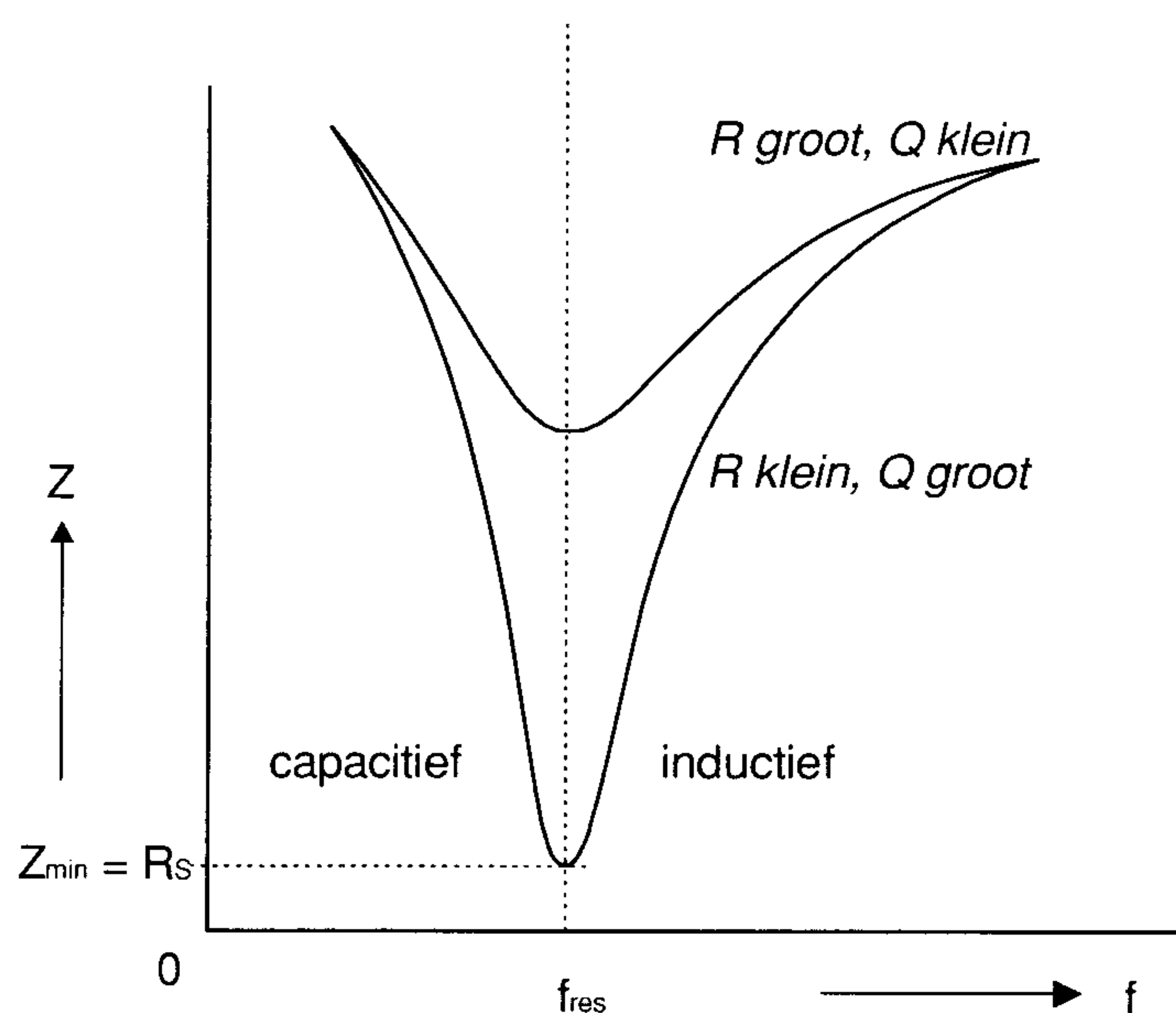
$$X_C - X_L = R \quad (f_2, \text{ capacitief)}$$

Eén en ander is nogal bewerkelijk. In de praktijk zijn we tevreden wanneer het verschil van f_2 en f_1 , de zogenaamde bandbreedte, bekend is. Dus:

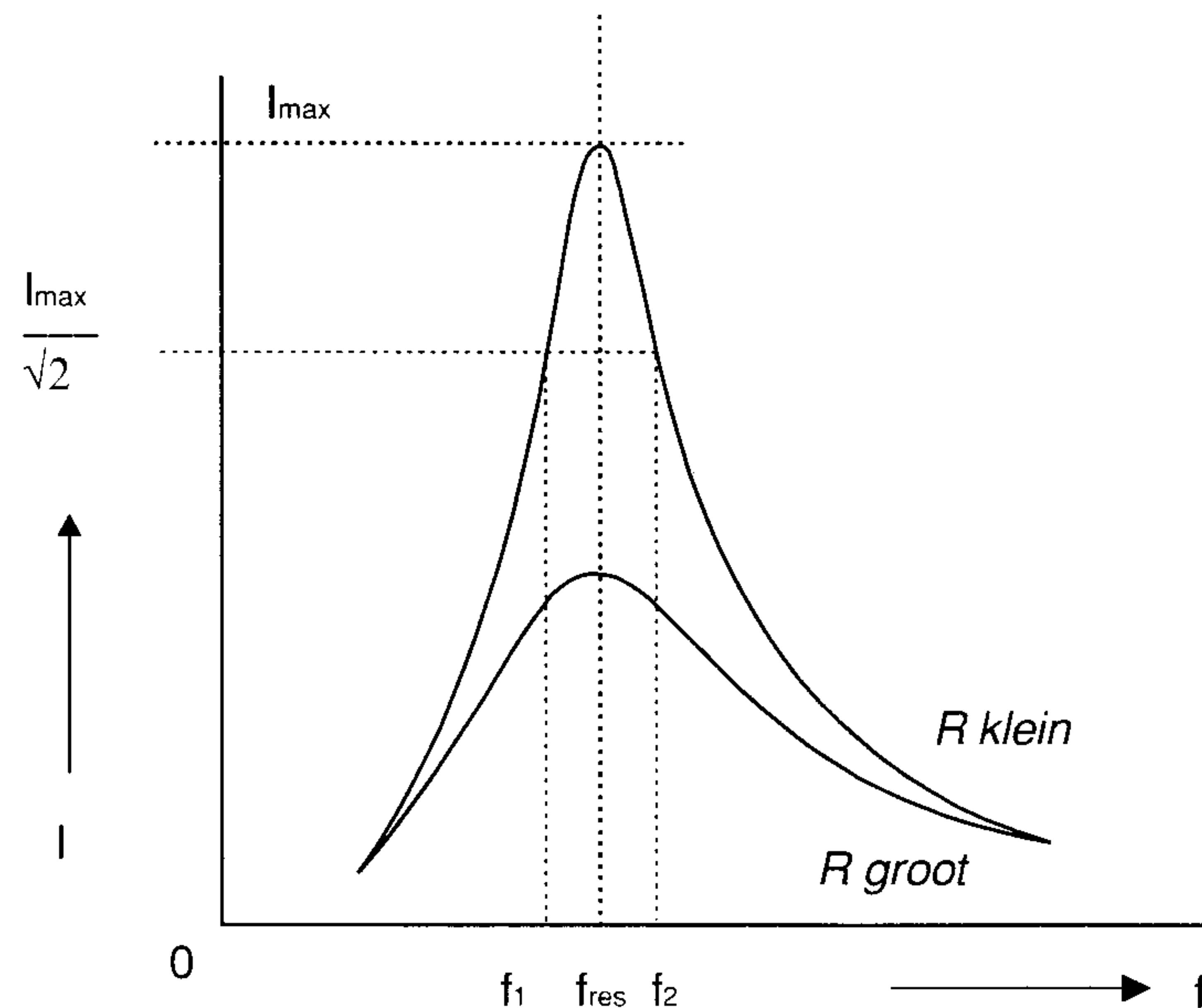
$$B_{\sqrt{2}} = f_2 - f_1$$

De index $\sqrt{2}$ geeft aan dat we zijn uitgegaan van de -3 dB-punten. Er bestaat een bepaald verband tussen de bandbreedte en de Q factor, namelijk:

$$B_{\sqrt{2}} = \frac{f_{res}}{Q} \quad (\text{formule 5})$$



Figuur 4.5-4 Impedantie grafiek van een seriekring. Hoe kleiner de de verliesweerstand R , des te scherper verloopt de grafiek (hoge Q factor).



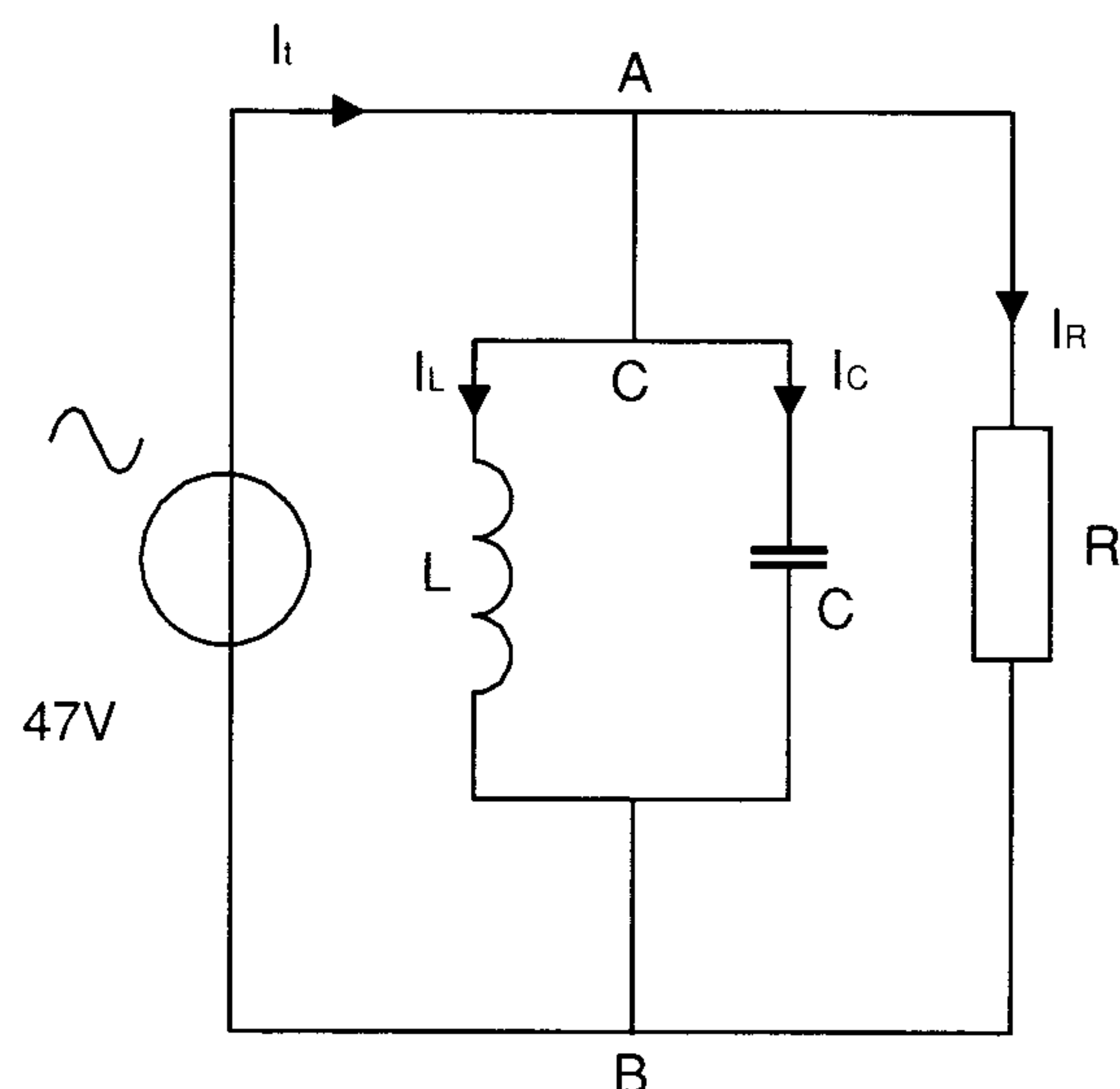
Figuur 4.5-4 Stroomgrafiek van een seriekring. Hoe kleiner de de verliesweerstand R , des te scherper verloopt de grafiek (hoge Q factor) en des te kleiner wordt het verschuif tussen f_2 en f_1

Deze formule leert ons dat B kleiner wordt naarmate Q toeneemt (omgekeerd evenredig) en dat B groter wordt als f_{res} toeneemt (recht evenredig). Om de selectiviteit van de kring, dus het scheidend vermogen, zo groot mogelijk te maken probeert men de Q zo hoog mogelijk op te voeren. In het ideale geval (dus $R = 0$) vormt de kring bij resonantie een kortsluiting en wordt de kringstroom I oneindig groot. De Q -factor is dan ook oneindig groot omdat de noemer van formule 4 gelijk is aan 0. Daardoor worden U_L en U_C eveneens oneindig groot. Zoiets kan in de praktijk natuurlijk niet voorkomen.

4.5.6 Parallelschakeling

Na de vrij uitgebreide behandeling van de seriekring zal de parallelkring (figuur 4.5-6) ons niet veel verrassen. Sommige dingen zijn echter precies omgekeerd. Let dus goed op en onthoud de verschillen.

In het vectordiagram (figuur 4.5-7a) is U horizontaal naar rechts getekend (er is maar één spanning). Om de basisdiagrammen toe te passen moeten we die een kwart slag draaien totdat U naar rechts wijst. I_C wijst dan omhoog en I_L omlaag. Naast de stroompijlen staat tussen haakjes het omgekeerde van de impedantie. Die zijn weer berekend voor $\omega = 25$ krad/s. Thans is I_C het grootst en gedraagt de kring zich capacitief; precies het omgekeerde van de seriekring. Dat is logisch, want de grootste stroom loopt door de kleinste impedantie.



$$\begin{array}{ll}
 I_t = 0,427 \text{ A} & L = 2,2 \text{ mH} \\
 I_L = 1 \text{ A} & C = 1 \mu\text{F} \\
 I_C = 1 \text{ A} & R = 110\Omega \\
 I_R = 0,427 \text{ A} &
 \end{array}$$

Figuur 4.5-6 Voorbeeld van een parallelschakeling

Met behulp van het vectordiagram kan men voor de impedantie afleiden:

$$\frac{1}{Z_t} = \sqrt{\left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2 + \left(\frac{1}{R}\right)^2} \quad (6)$$

Deze formule geeft ook de juiste uitkomst als de linker term tussen haakjes negatief is.

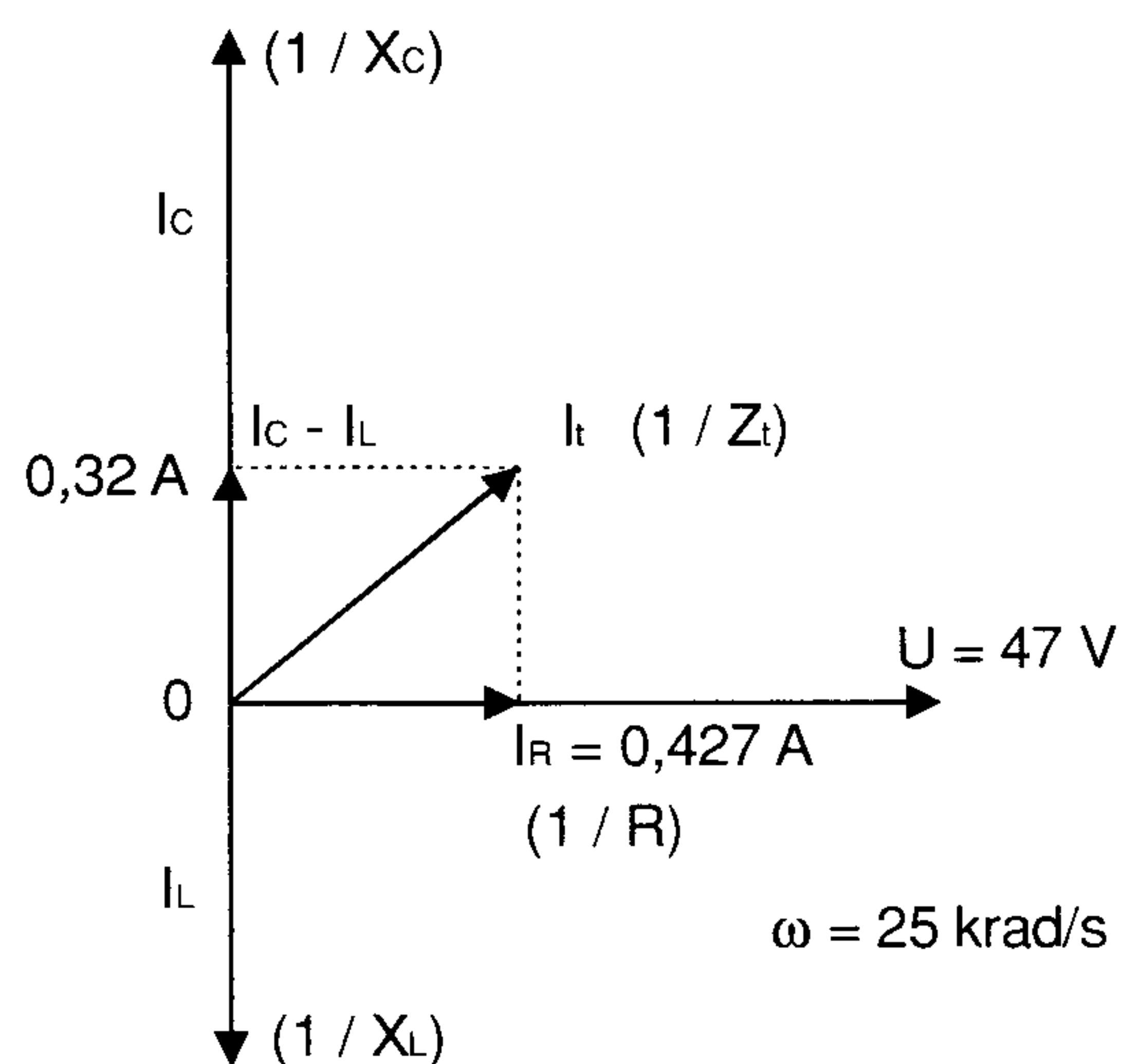
Opdracht 7

Bereken met behulp van formule 6 en de gegevens uit figuur 4.5-6 de waarde van Z_t en I_t .

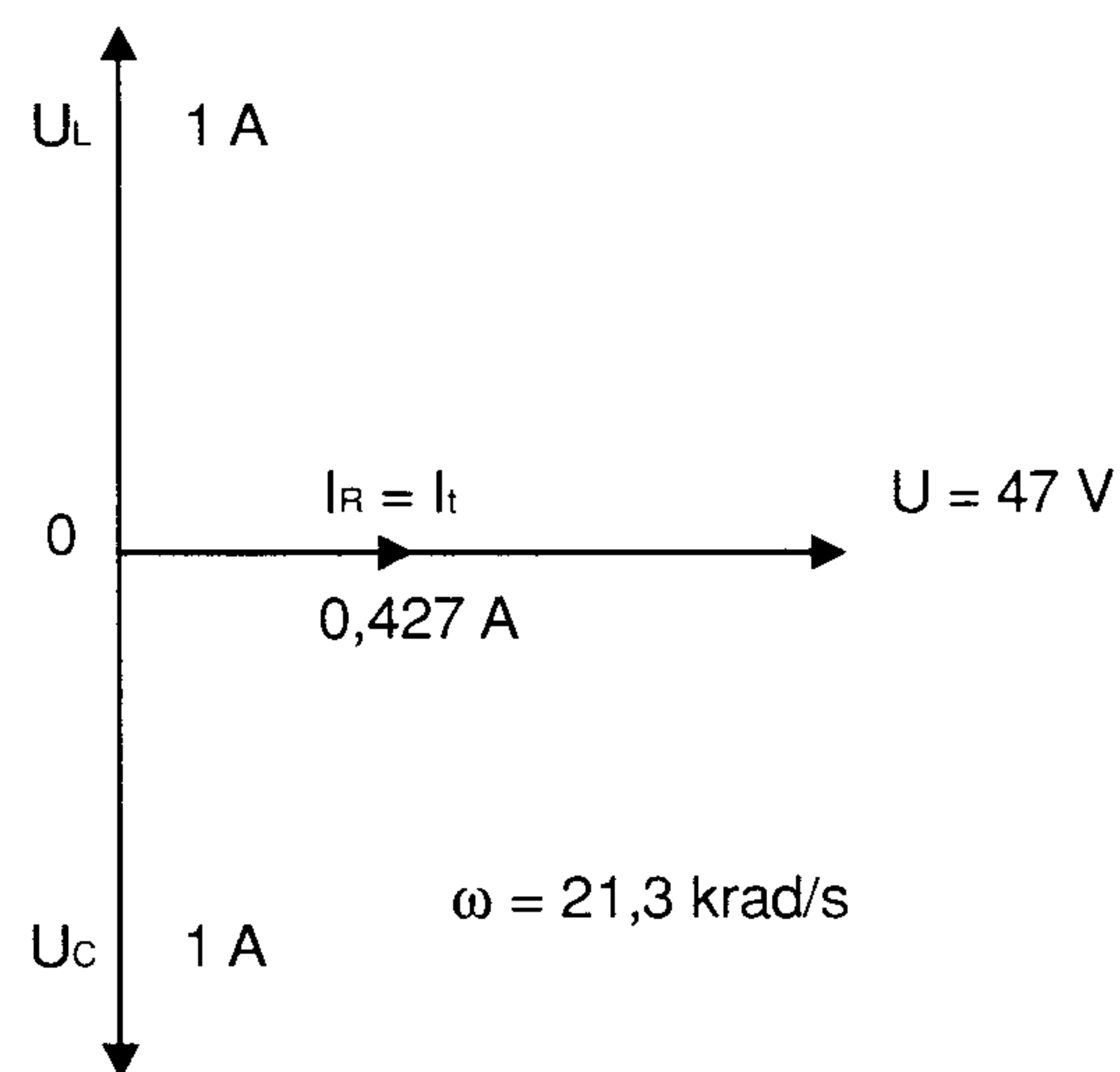
We kunnen de grafiek van Z_t (figuur 4.5-8) vinden door Z_t voor een groot aantal frequenties te berekenen. Daar I_t omgekeerd evenredig is met Z_t is de stroomgrafiek (figuur 4.5-9) daaruit gemakkelijk af te leiden. In de praktijk wordt een parallelkring meestal gestuurd door een stroombron. De stroom I is dan constant en over de kring ontstaat een spanning welke evenredig is met Z_t . Dat is in figuur 4.5-8 tussen haakjes aangegeven.

Opdracht 8

Teken het vectordiagram van de kring uit figuur 4.5-6 wanneer $\omega = 18,2$ krad/s en bereken Z_t en I_t .



Figuur 4.5-7a Vectordiagram van de parallelkring uit figuur 4.5-6 (capacitief).



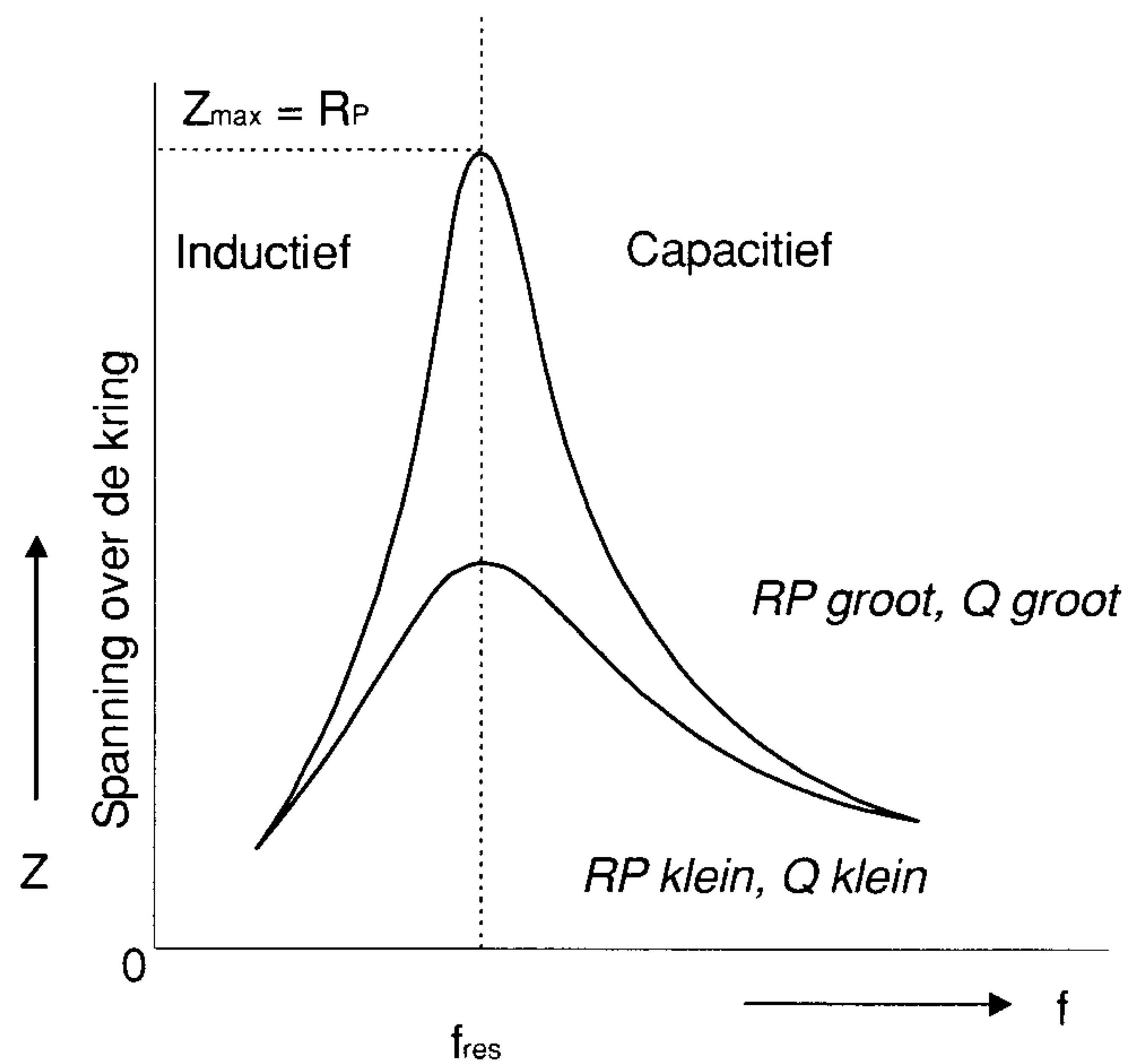
Figuur 4.5-7b Vectordiagram van dezelfde parallelkring bij resonantie.

Als we de frequentie verlagen tot 21,3 krad/s is de kring in resonantie. X_L en X_C zijn dan beide 47Ω en I_C en I_L vallen tegen elkaar weg. Bij gevolg is $I_t = I_R$ (figuur 4.5-7b). Omdat het criterium voor resonantie van de parallelkring hetzelfde is als bij de seriekring, volgt de resonantiefrequentie eveneens uit formule 2 en 3. Door de spoel en condensator vloeit dan een stroom:

$$I_L = I_C = \frac{U}{X} = \frac{47}{47} = 1 \text{ A}$$

De stroom door de weerstand R is echter:

$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{47}{110} = 0,427 \text{ A}$$



Figuur 4.5-8 Impedantie grafiek van een parallelkring. Hoe groter de verliesweerstand R_p , hoe scherper het verloop van de grafiek (hoge Q factor). Bij stroomsturing is dit tevens de grafiek van de spanning over de kring.

Het verschijnsel dat I_L en I_C groter zijn dan I_R noemen we stroomopslingering. De kwaliteitsfactor van de kring (Q_P) volgt uit:

$$Q_P = \frac{I_C}{I_t} \text{ of } Q_P = \frac{I_L}{I_t}$$

(De index P geeft aan dat het om een parallel kring gaat.) Daar bij parallelresonantie $I_t = I_R$ vinden we in dit geval:

$$Q_P = \frac{1}{0,427} = 2,34$$

De stroom door L en C is bij resonantie 2,34 maal groter dan de totaalstroom. Wanneer we de ampèremeter in serie met de spoel of condensator schakelen zal deze inderdaad 1 A aanwijzen. In de verbinding AC (figuur 4.5-6) wijst de meter niets aan. Van buitenaf gezien gedraagt een ideale parallelkring zich als een isolator.

In het algemeen geldt:

$$I_C = \frac{U}{X_C} \text{ en } I_R = \frac{U}{R} \text{ zodat:}$$

$$Q_P = \frac{\left(\frac{U}{X_C}\right)}{\left(\frac{U}{R}\right)} = \frac{U}{X_C} \cdot \frac{R}{U} = \frac{R}{X_C}$$

(Delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde!)

We leerden dat $X_C = \frac{1}{\omega C}$ dus is Q_P :

$$Q_P = \frac{R_P}{\left(\frac{1}{\omega C}\right)} = \omega \cdot C \cdot R_P \quad (7)$$

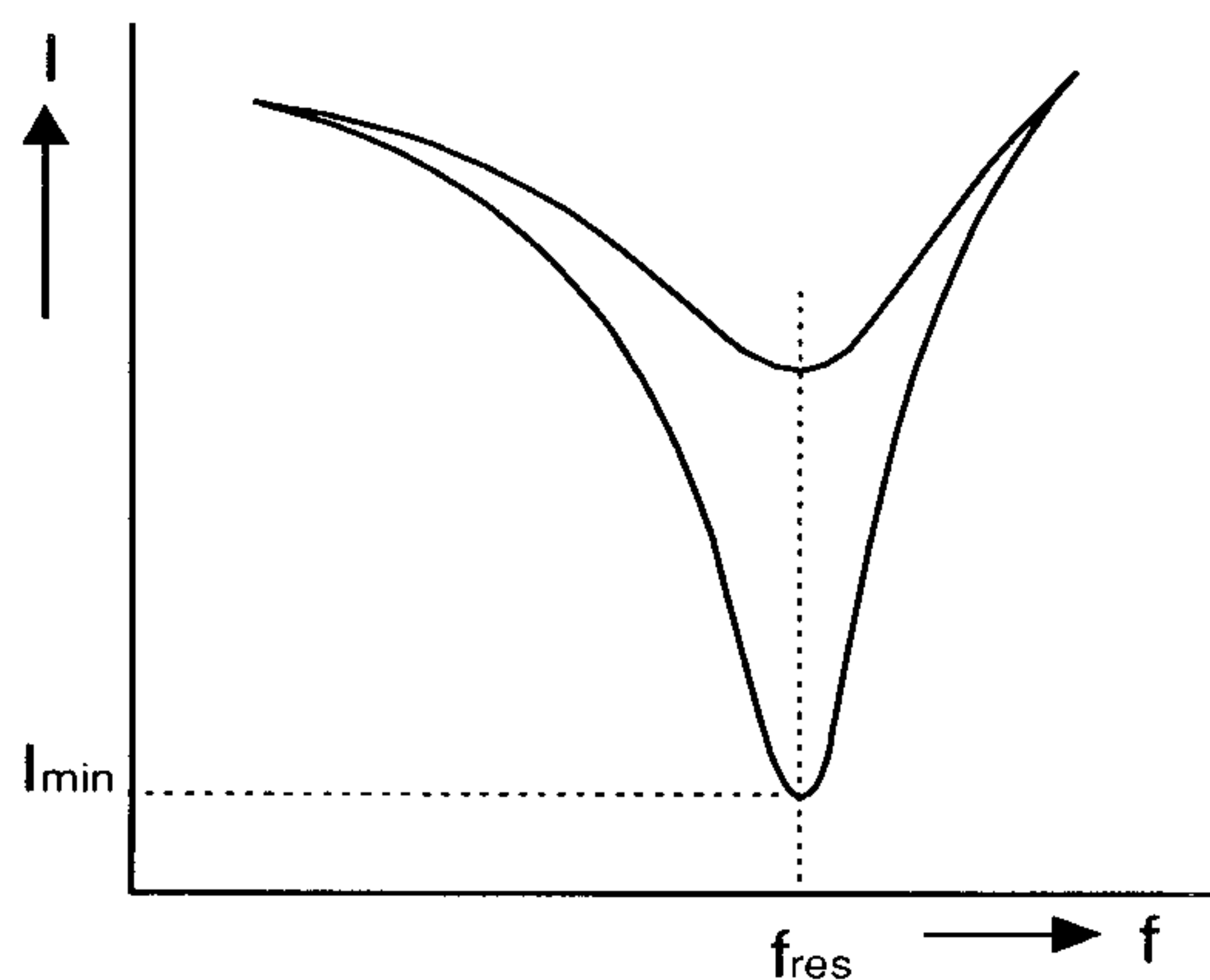
Leid zelf een formule af voor Q_P , uitgaande van I_L .

Opdracht 9

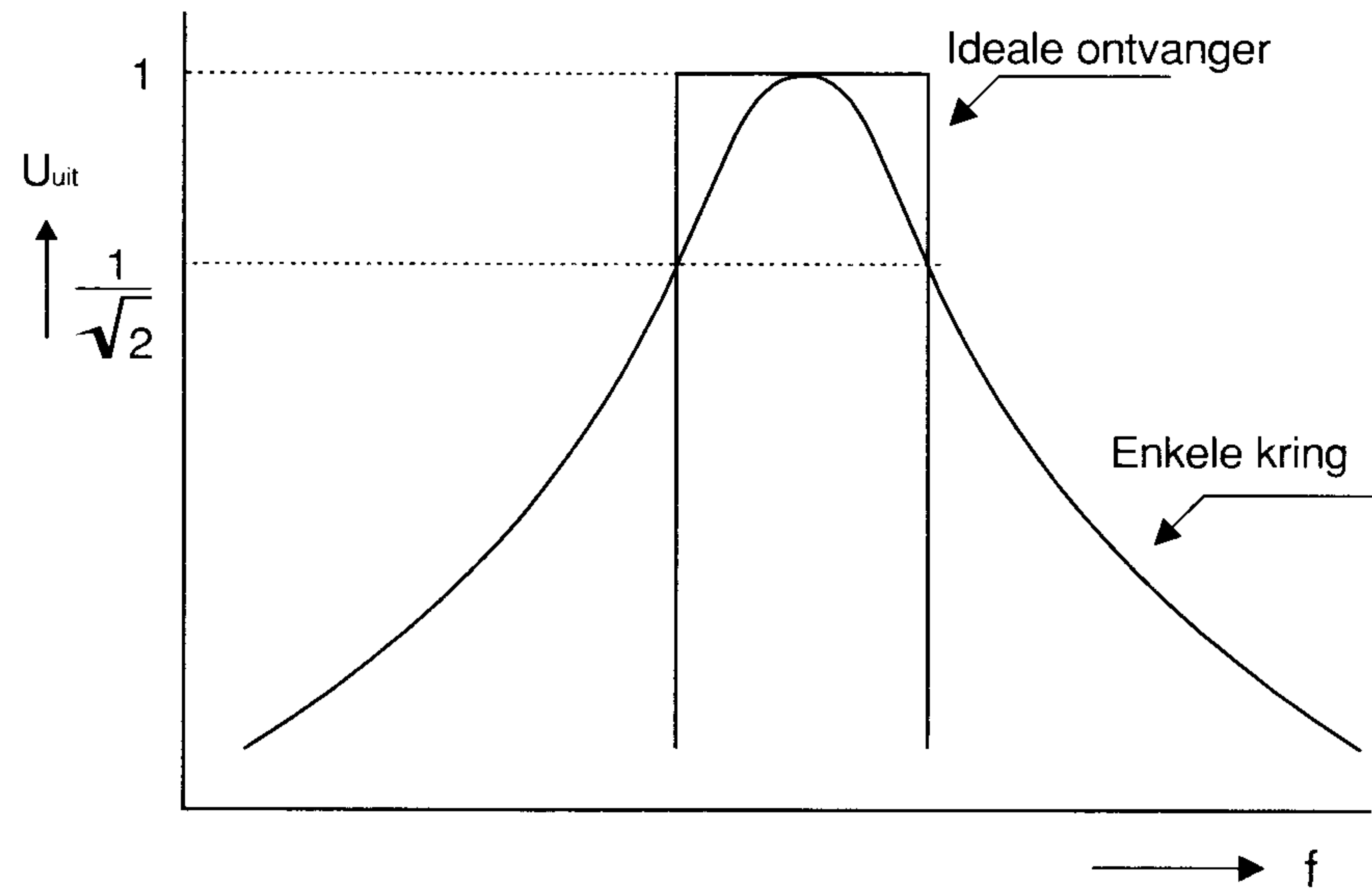
Bereken Q_P met formule 7 en de gegevens uit figuur 4.5-6

Zonder nader bewijs vermelden we dat de bandbreedte van een parallelkring is te berekenen met formule 5.

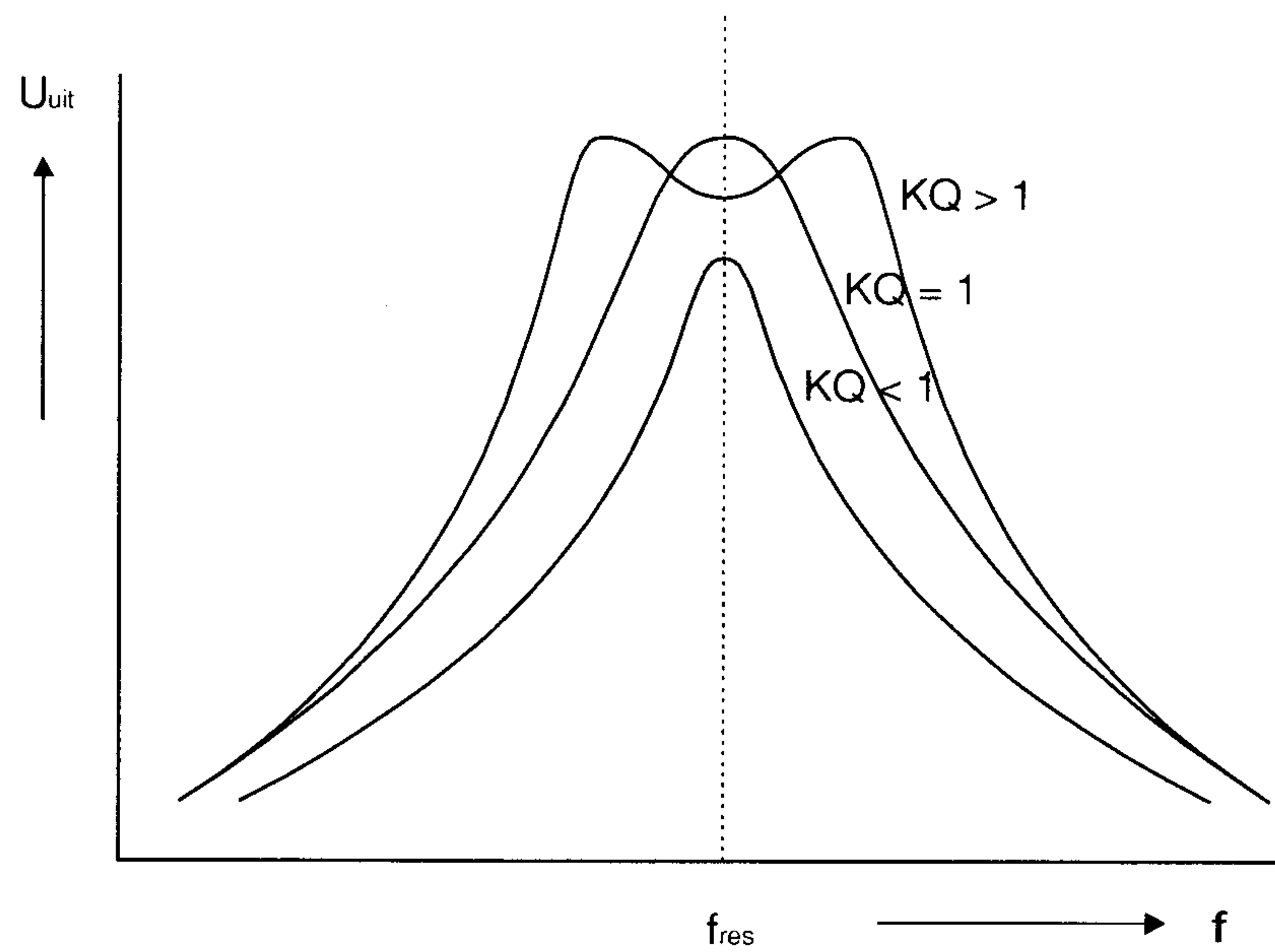
In het ideale geval ($R_P = \infty$) worden Z_I en Q_P oneindig groot. Bij sturing met een stroombron wordt de spanning over de kring eveneens oneindig groot. Het zal duidelijk zijn dat dit in de praktijk niet mogelijk is.



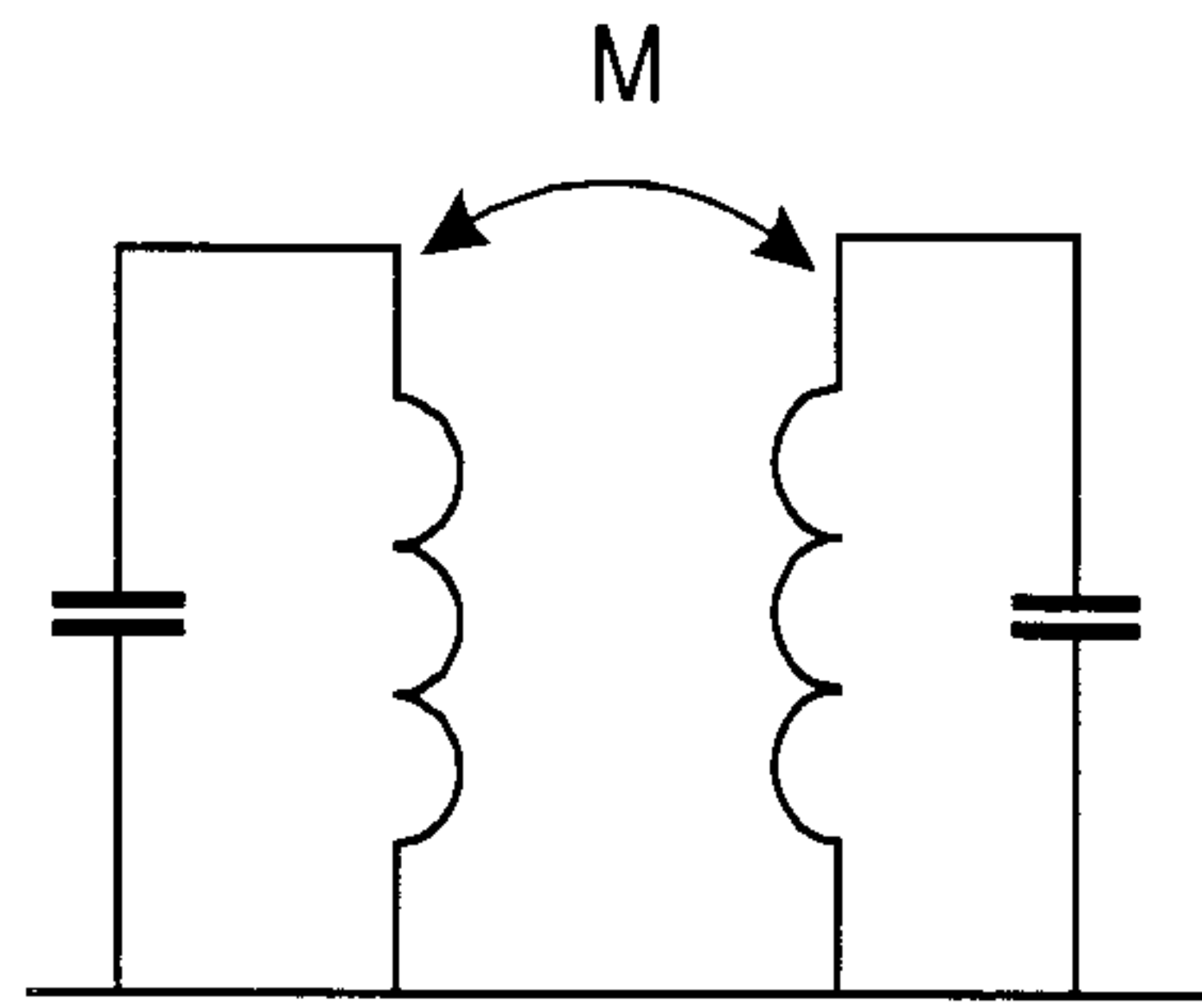
Figuur 4.5-9 Grafiek van de totaalstroom door een parallelkring bij sturing met een spanningsbron.



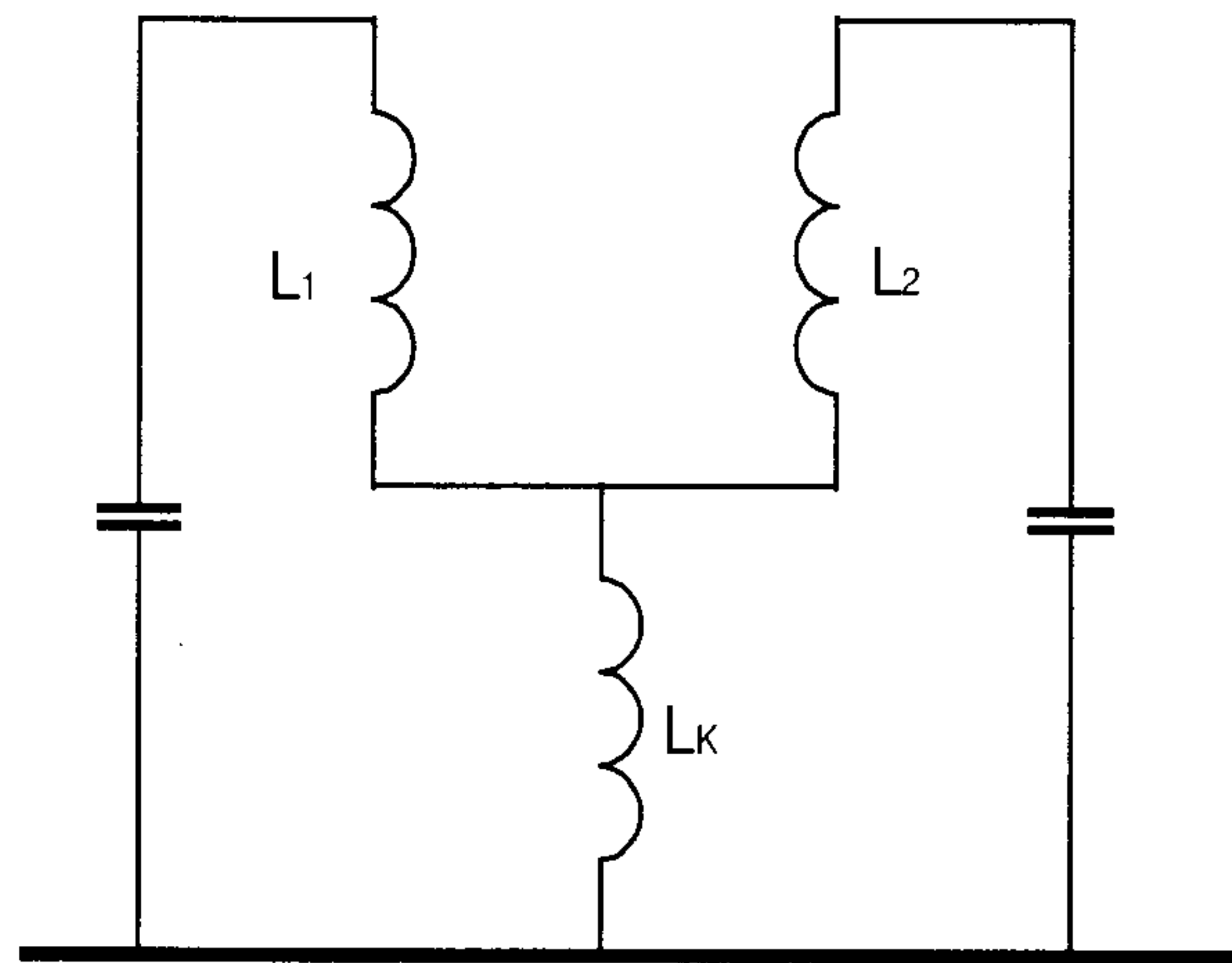
Figuur 4.5-10a Vergelijking tussen de ideale doorlaatcurve van een ontvanger en de benadering hiervan door één afstemkring.



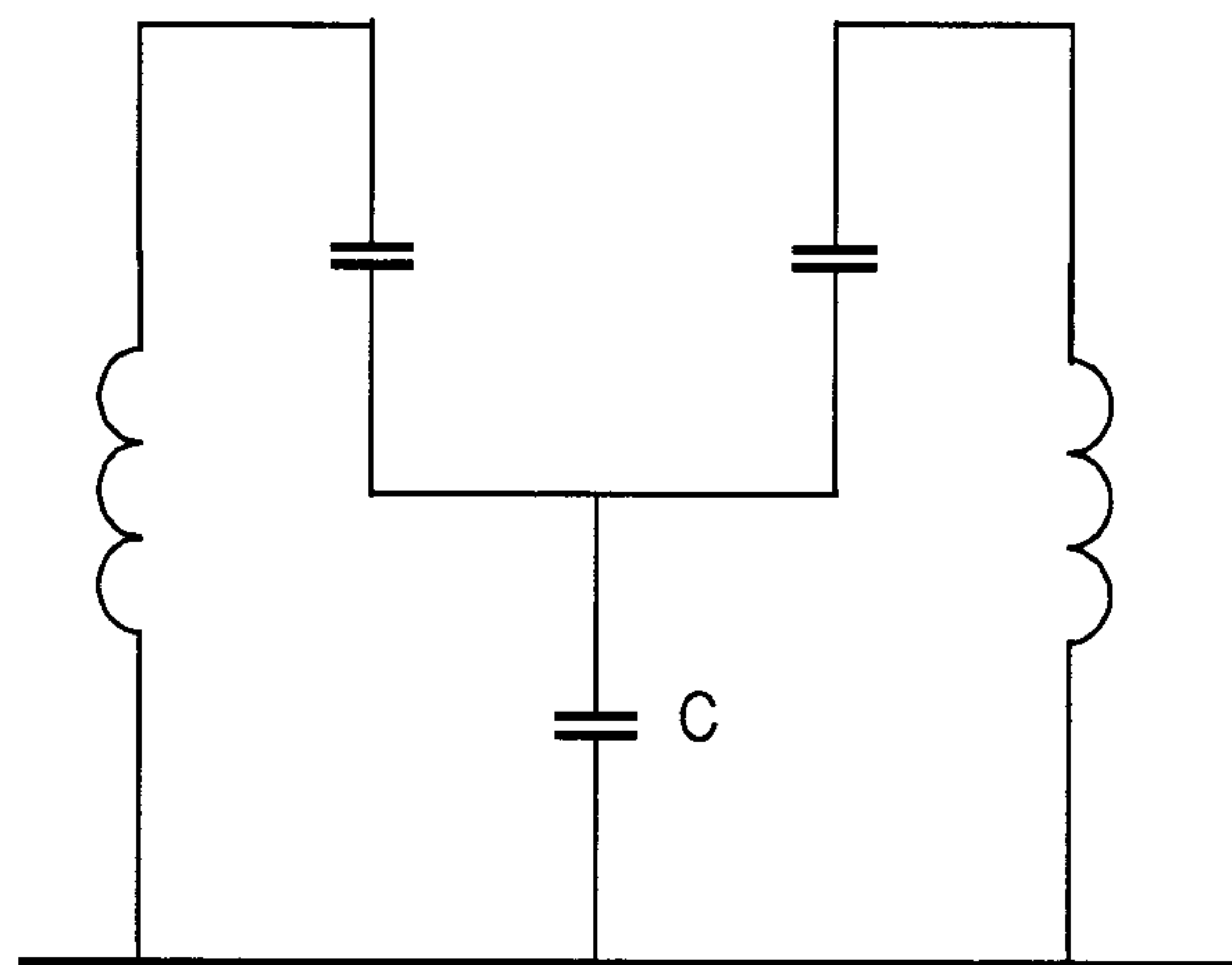
Figuur 4.5-10b Het gebruik van twee kringen met licht overkritische koppeling levert een betere benadering op van de ideale doorlaatcurve.



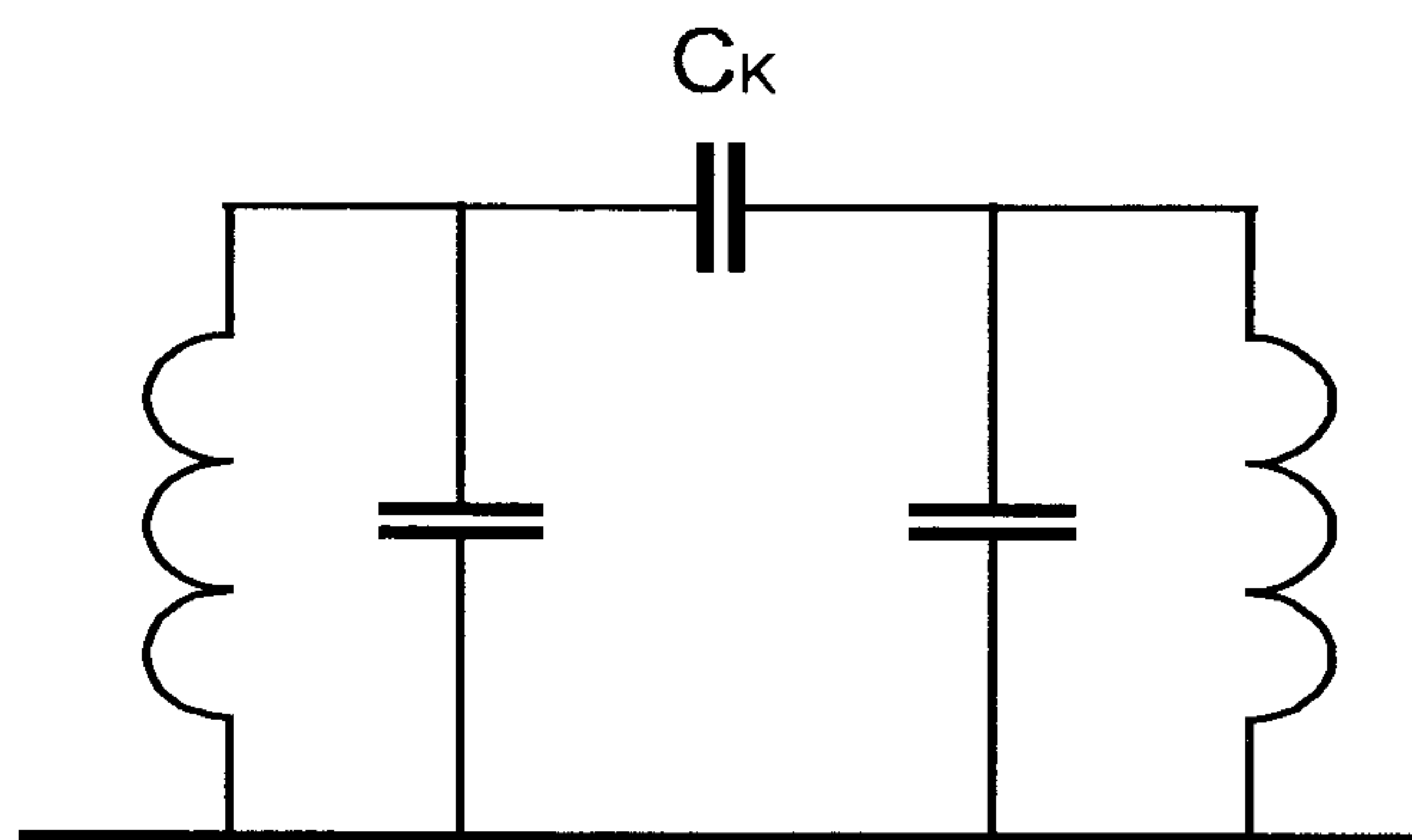
Figuur 4.5-11a Magnetische koppeling.



Figuur 4.5-11b Inductieve voetkoppeling.



Figuur 4.5-11c Capacitieve voetkoppeling.



Figuur 4.5-11d Capacitieve topkoppeling.

4.5.7 Gekoppelde kringen

In figuur 4.5-10a is de doorlaatcurve van een ideale ontvanger getekend. Een volkomen vlak doorlaatgebied dat abrupt overgaat op een oneindige demping in het sfergebied. In de praktijk is dat niet mogelijk, maar het gebruik van slechts één parallelkring levert wel een erg slechte benadering van het ideaal op. Door twee of meer kringen te koppelen wordt een aanmerkelijk betere doorlaatcurve verkregen. Daarbij wordt een deel van de energie van de eerste kring, overgeheveld naar de tweede kring. In figuur 4.5-11a t/m d zijn enkele koppelmethode weergegeven.

A. Magnetische- of veldkoppeling

Een deel van het magneetveld van de eerste spoel loopt tevens door de tweede spoel. Voor een betrouwbaar resultaat luistert de afstand tussen de spoelen nogal nauw. Deze methode wordt daarom hoofdzakelijk in industrieel vervaardigde kringen toegepast.

B. Inductieve voetkoppeling

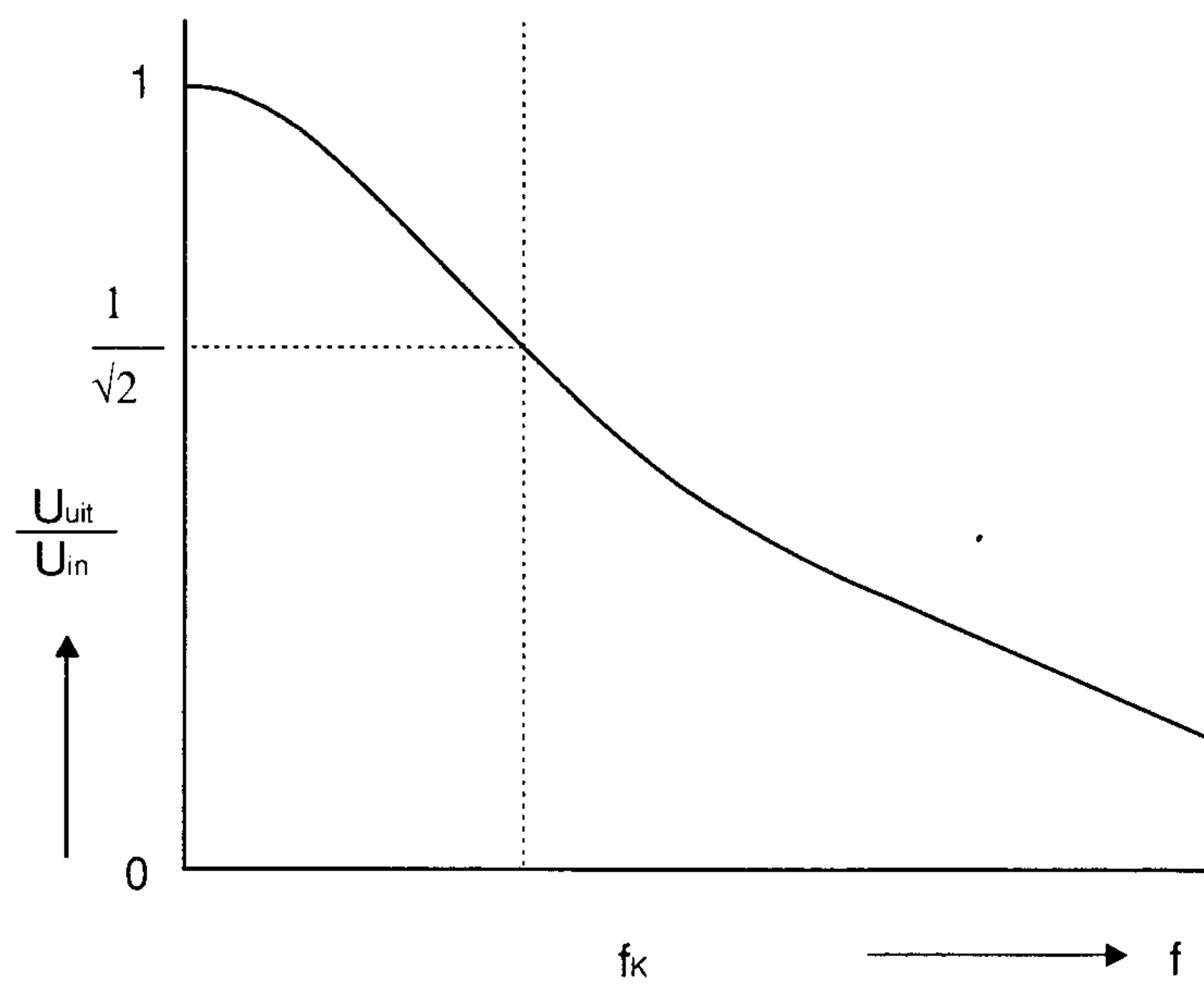
De koppeling komt tot stand door middel van een kleine zelfinductie aan de voet van de kring.

C. Capacitieve voetkoppeling

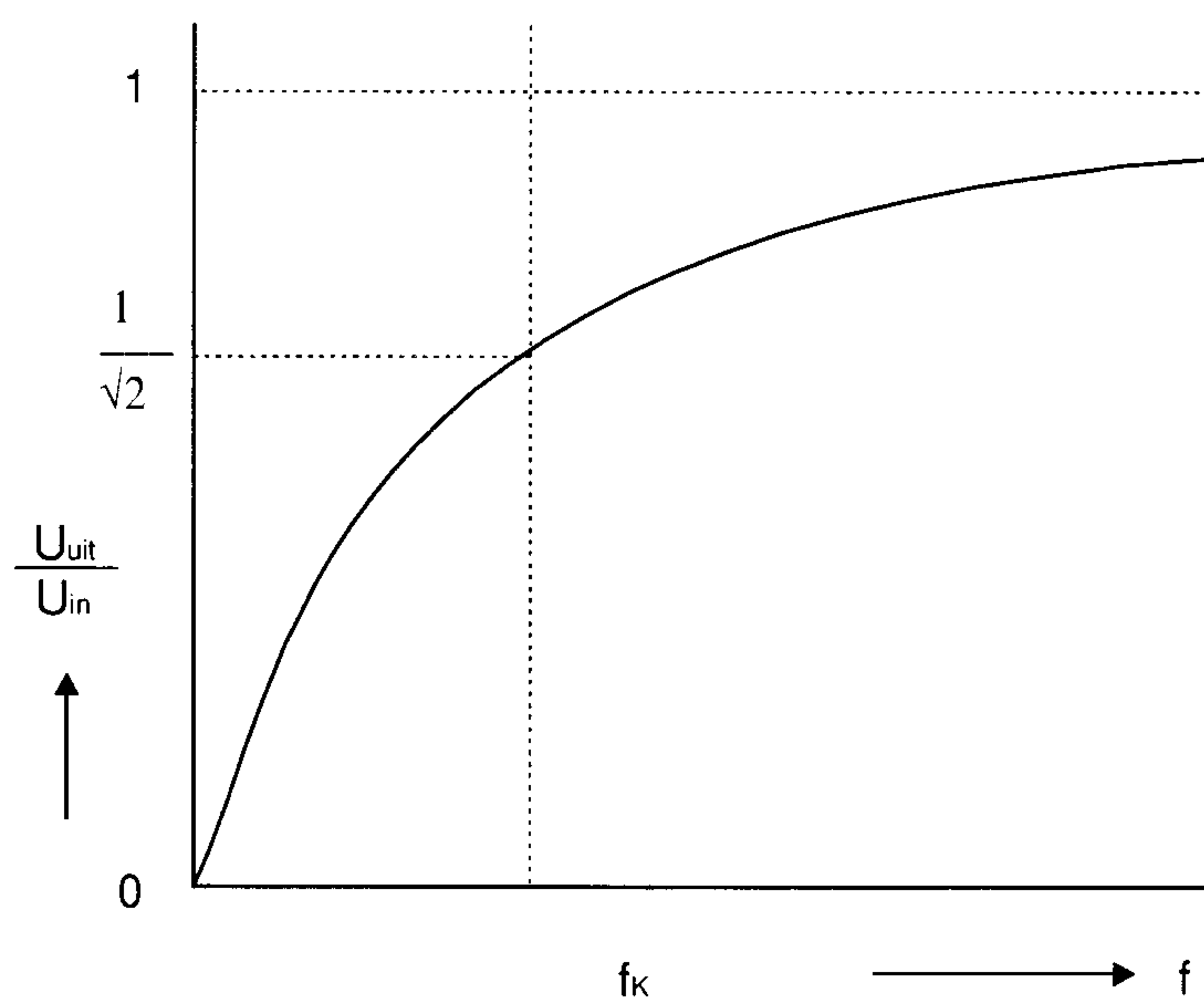
Soms leidt capacitieve topkoppeling tot een onhanteerbaar kleine koppelcapaciteit. Dan biedt voetkoppeling een elegant alternatief. Hiervoor is namelijk een grote capaciteit nodig.

D. Capacitieve topkoppeling

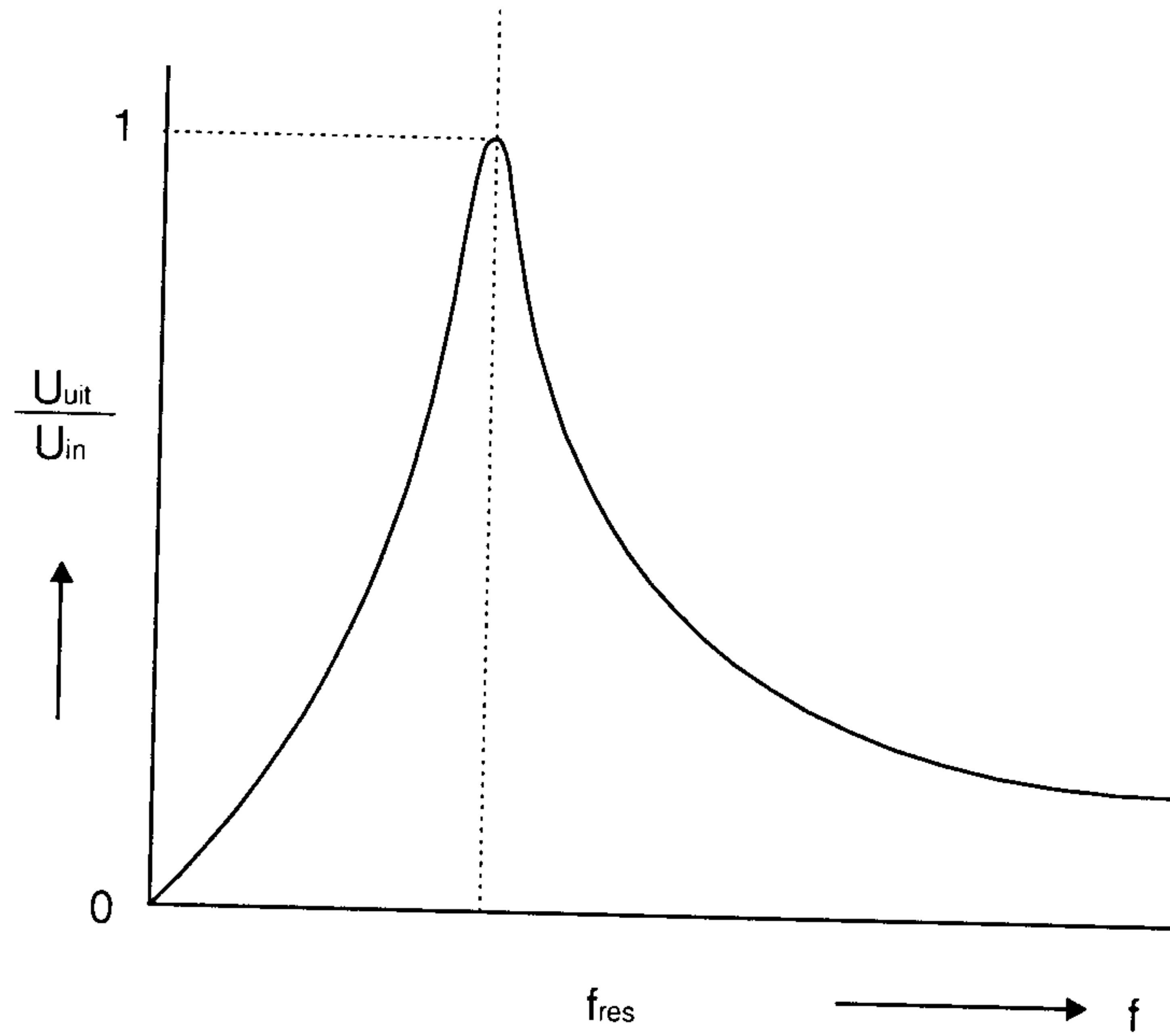
De koppeling gebeurt met behulp van een kleine capaciteit aan de top van de kring. Vanwege de eenvoud wordt deze schakeling vaak door amateurs toegepast.



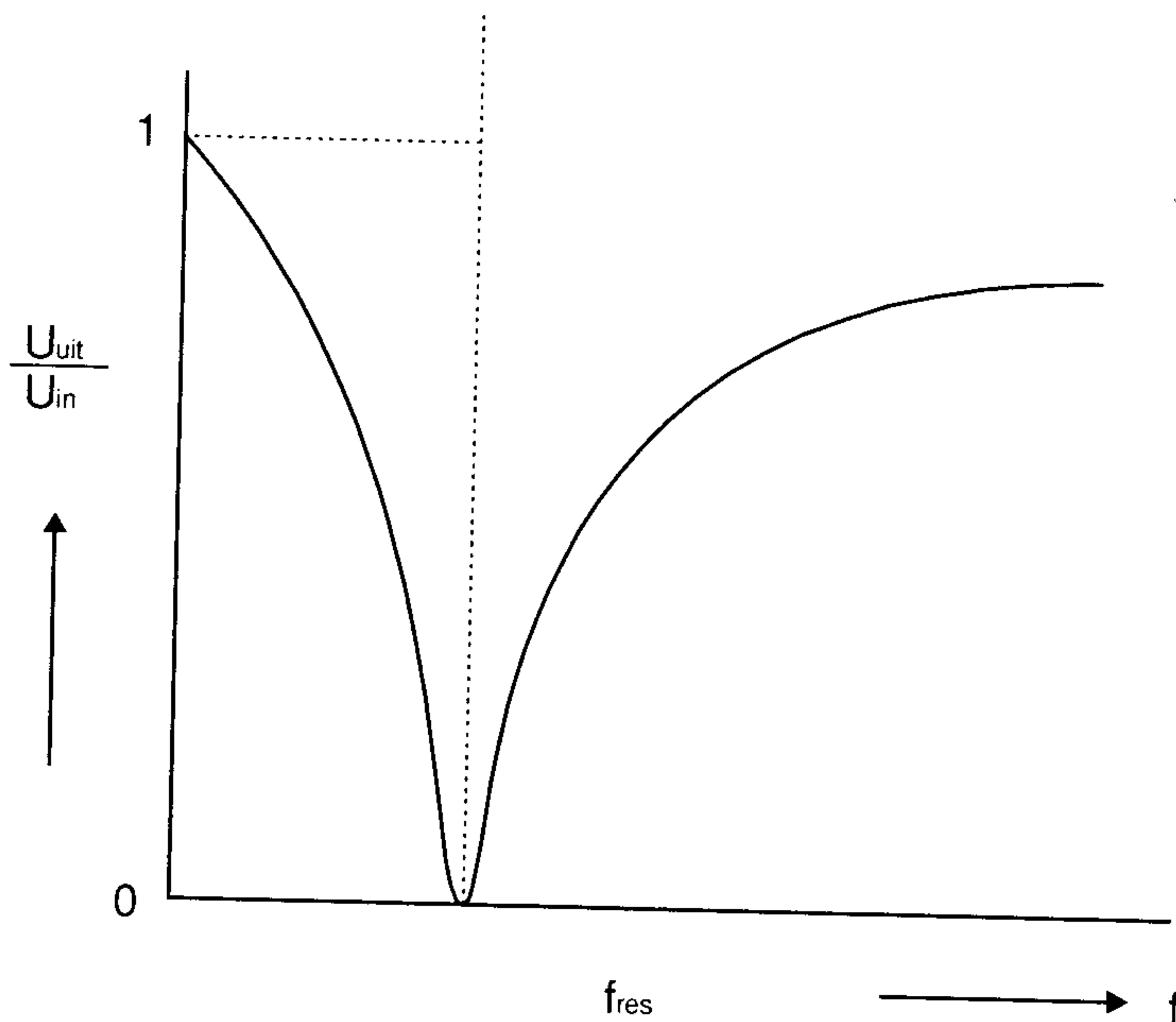
Figuur 4.5-12a Laagdoorlaat karakteristiek.



Figuur 4.5-12b Hoogdoorlaat karakteristiek.



Figuur.4.5-12c Banddoorlaat karakteristiek.



Figuur 4.5-12d Bandsper karakteristiek.

Figuur 4.5-10b toont de doorlaatcurven die op deze wijze bereikbaar zijn. Twee factoren bepalen de uiteindelijke karakteristiek:

1) De koppelingsgraad k

Hieronder verstaat men de verhouding tussen de koppelingsreactantie en het meetkundig gemiddelde van de overige gelijksoortige reactanties. In figuur 4.5-11b levert dat bijvoorbeeld op:

$$k = \frac{X_k}{\sqrt{X_1 \cdot X_2}} = \frac{\omega \cdot L_k}{\sqrt{\omega \cdot L_1 \cdot \omega \cdot L_2}}$$

zodat:

$$k = \frac{L_k}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}$$

2) De Q -factor

Met behulp van het produkt $k \cdot Q$ is de volgende driedeling mogelijk:

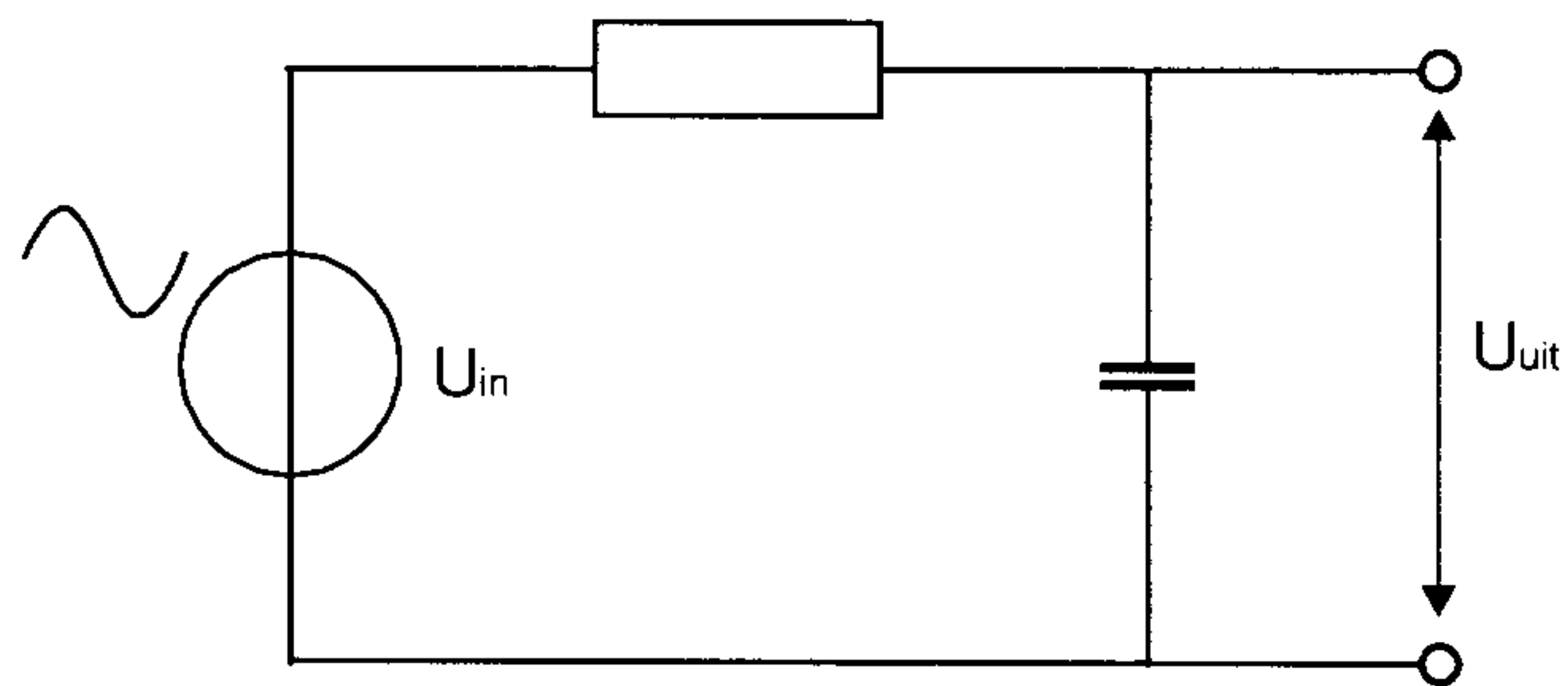
- A. $k \cdot Q < 1$: Onderkritische koppeling.
Dit levert een scherpe doorlaatcurve op.
- B. $k \cdot Q = 1$: Kritische koppeling.
De karakteristiek vertoont een vlakke top. De benadering van het ideaal is daarmee al iets beter geworden.
- C. $k \cdot Q > 1$: Overkritische koppeling.
Karakteristiek voor deze koppeling is het ontstaan van twee maxima ter weerszijden van de resonantiefrequentie: de zogenaamde koppelgolven. Men kan aantonen dat de snelheid waarmee de curve voorbij het -3 dB-punt omlaag gaat, toeneemt naarmate k groter is. Wanneer we de welving van de doorlaatcurve voor lief nemen wordt de ideale doorlaatcurve nog beter benaderd.

4.5.8 Filterkarakteristieken

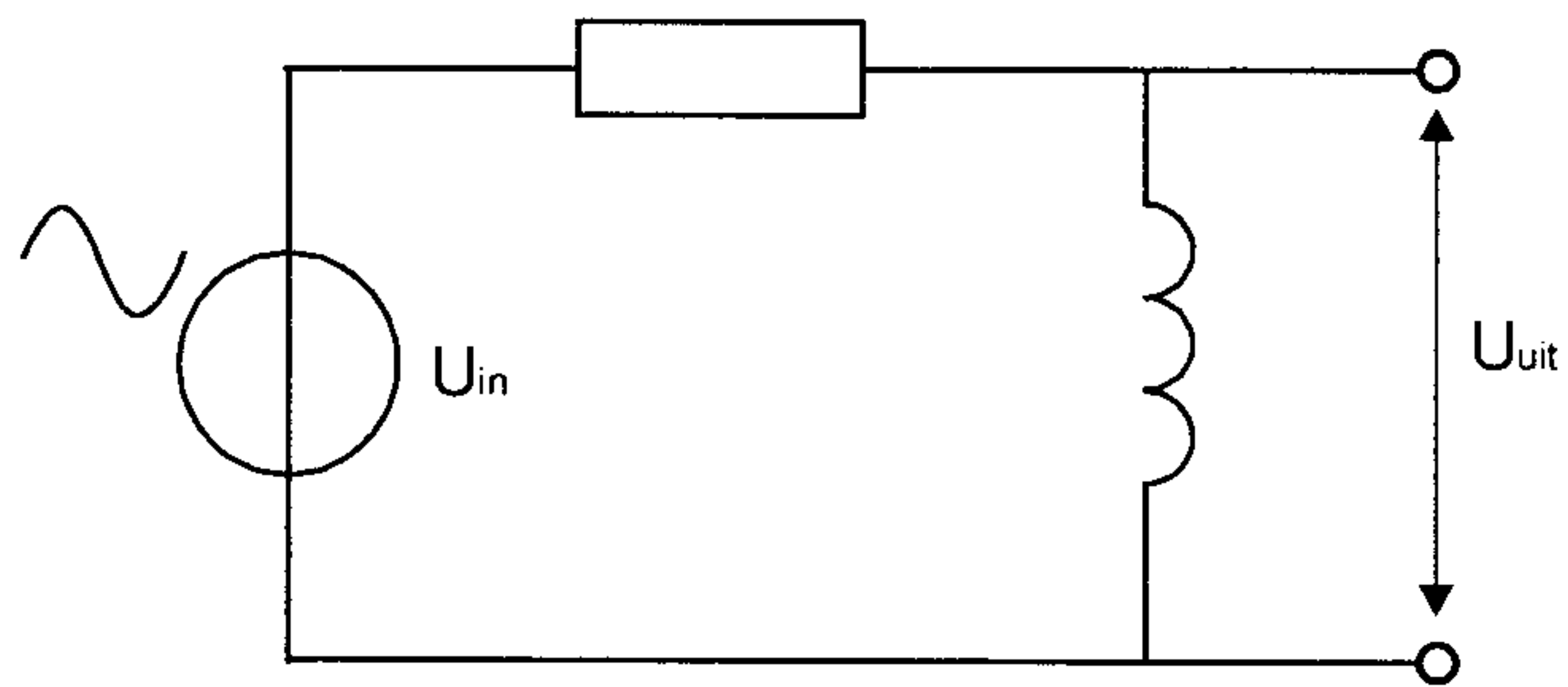
Tot nu toe hebben we slechts één karakteristiek behandeld, namelijk de banddoorlaat. In totaal zijn er vier verschillende karakteristieken (figuur 4.5-12a t/m d):

- de laagdoorlaat;
- de hoogdoorlaat;
- de banddoorlaat;
- de bandsper.

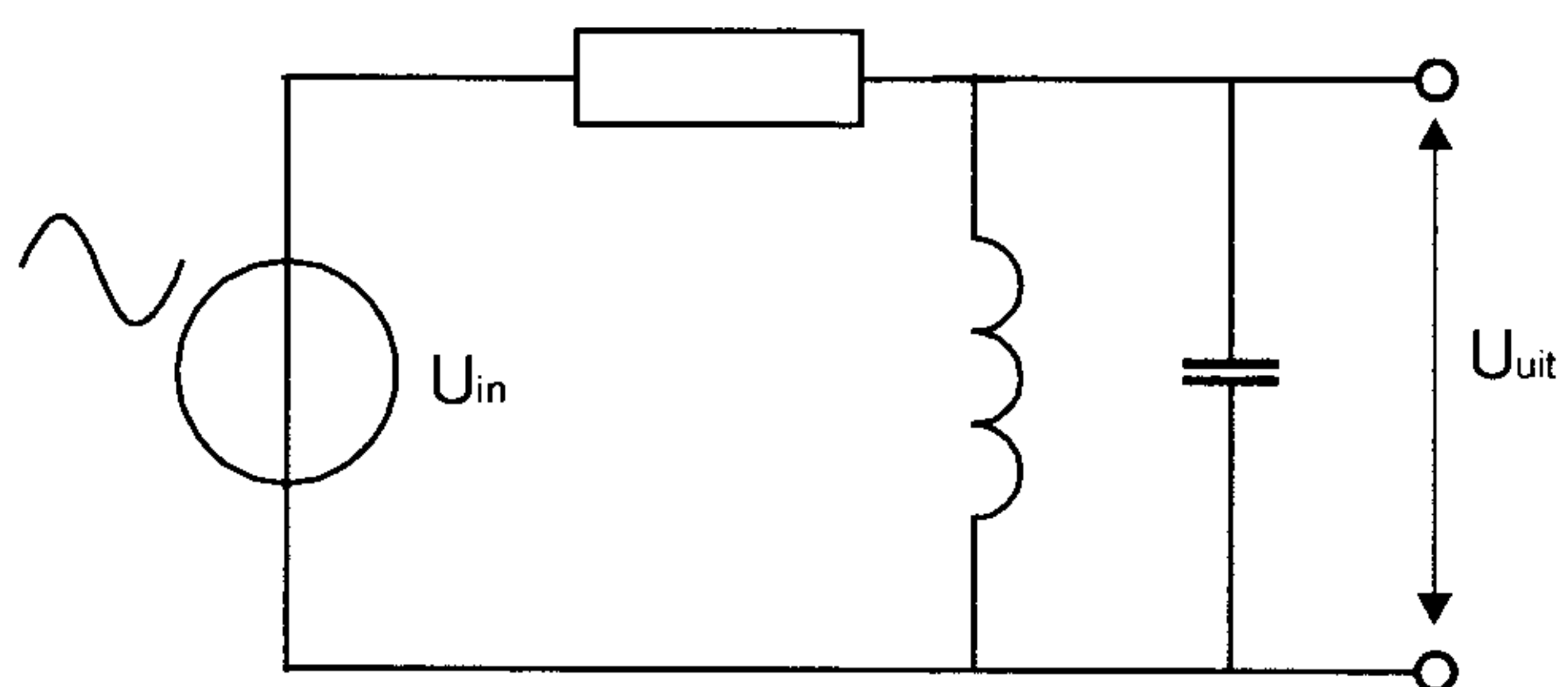
Voor al deze karakteristieken is een geschikte filterschakeling getekend (figuur 4.5-13a t/m d), maar er zijn ook andere schakelingen mogelijk. Bij een van de examenvragen geeft men een filter schakeling en dan moeten we bepalen welke karakteristiek daarbij hoort. Daartoe bekijken we het gedrag van de schakeling bij een zeer lage frequentie (zeg maar gelijkspanning) en een zeer hoge frequentie. Wanneer in de schakeling een serie- of parallelkring voorkomt, bekijken we het gedrag ook bij de resonantiefrequentie.



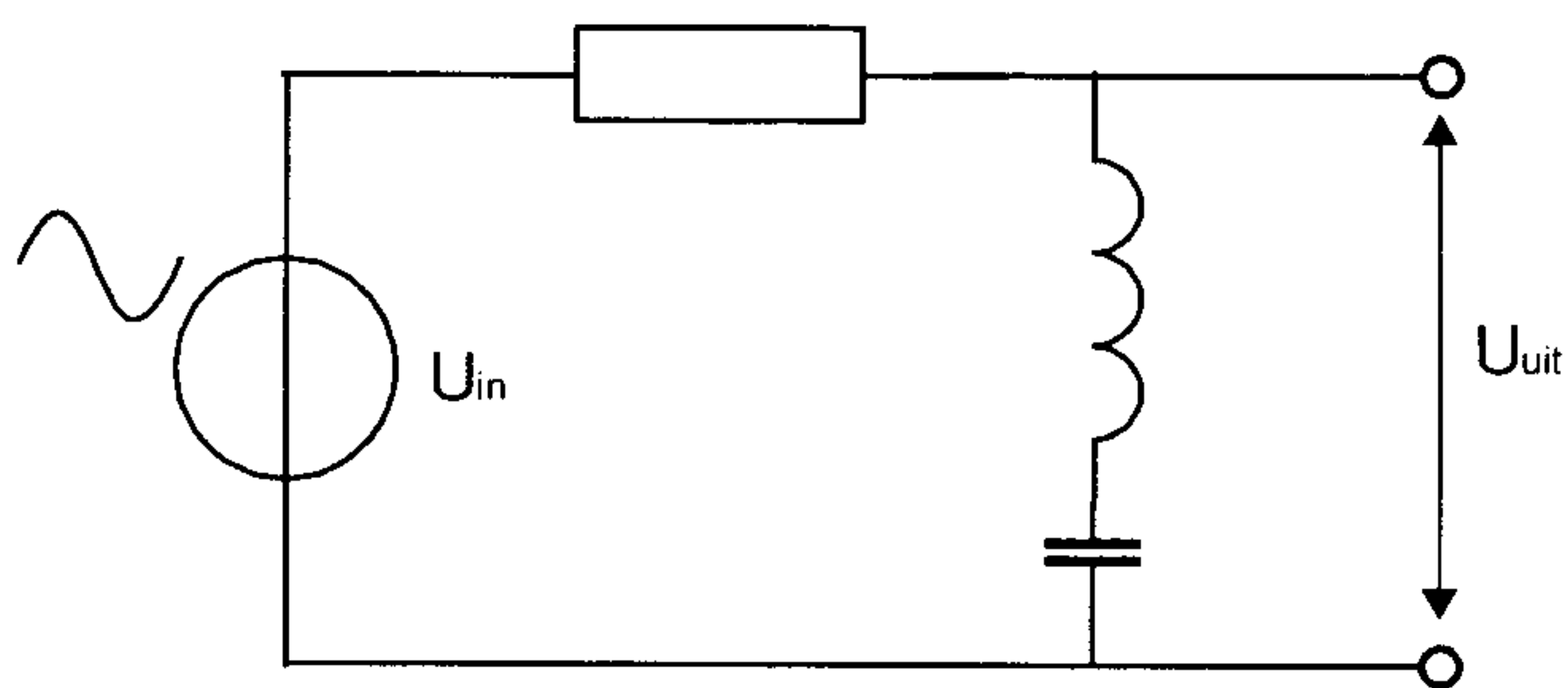
Figuur 4.5-13a Laagdoorlaat filter



Figuur 4.5-13b Hoogdoorlaat filter



Figuur 4.5-13c Banddoorlaat filter



Figuur 4.5-13d Bandsper filter

Figuur 4.5-13 geeft een aantal schakelingen waarmee de karakteristieken uit figuur 4.5-12 kunnen worden gerealiseerd. Opvallend is het slappe verloop van de curven uit figuur 4.5-12a en figuur 4.5-12b. Dit komt doordat in schakeling 4.5-12c respectievelijk 4.5-12d slechts één frequentie afhankelijke component voorkomt (C resp. L). In de praktijk is de filterwerking van een enkelvoudig filter meestal onvoldoende.

Als voorbeeld kijken we eerst naar figuur 4.5-13a. Bij $f = 0$ is de impedantie van C (X_C) oneindig hoog. Deingangsspanning U_i staat dan onverzwakt op de uitgang. Bij $f = \infty$ vormt C een kortsluiting en is $U_{uit} = 0$. Dat levert de curve van figuur 4.5-12a op, of wel een laagdoorlaatfilter.

Als tweede voorbeeld nemen we figuur 4.5-13d. Bij $f = 0$ geldt: $X_C = \infty$ dus U_i staat onverzwakt op de uitgang. Als $f = \infty$ dan is $X_L = \infty$ en weer staat U_i onverzwakt op de uitgang. De serieschakeling van L en C vormt een kortsluiting bij de resonantiefrequentie en dan is $U_{uit} = 0$. Deze schakeling produceert dus een bandsper-karakteristiek (figuur 4.5-12d). Omdat de werking van dit filter berust op het wegzuigen van een bepaalde frequentie spreekt men ook wel van een zuigkring. Deze schakeling wordt wel toegepast in de ontvanger-ingangstrap om storing door een sterk station te verminderen. Toon met deze redeneermethode aan dat figuur 4.5-13c een banddoorlaat filter is.

Opdracht 10

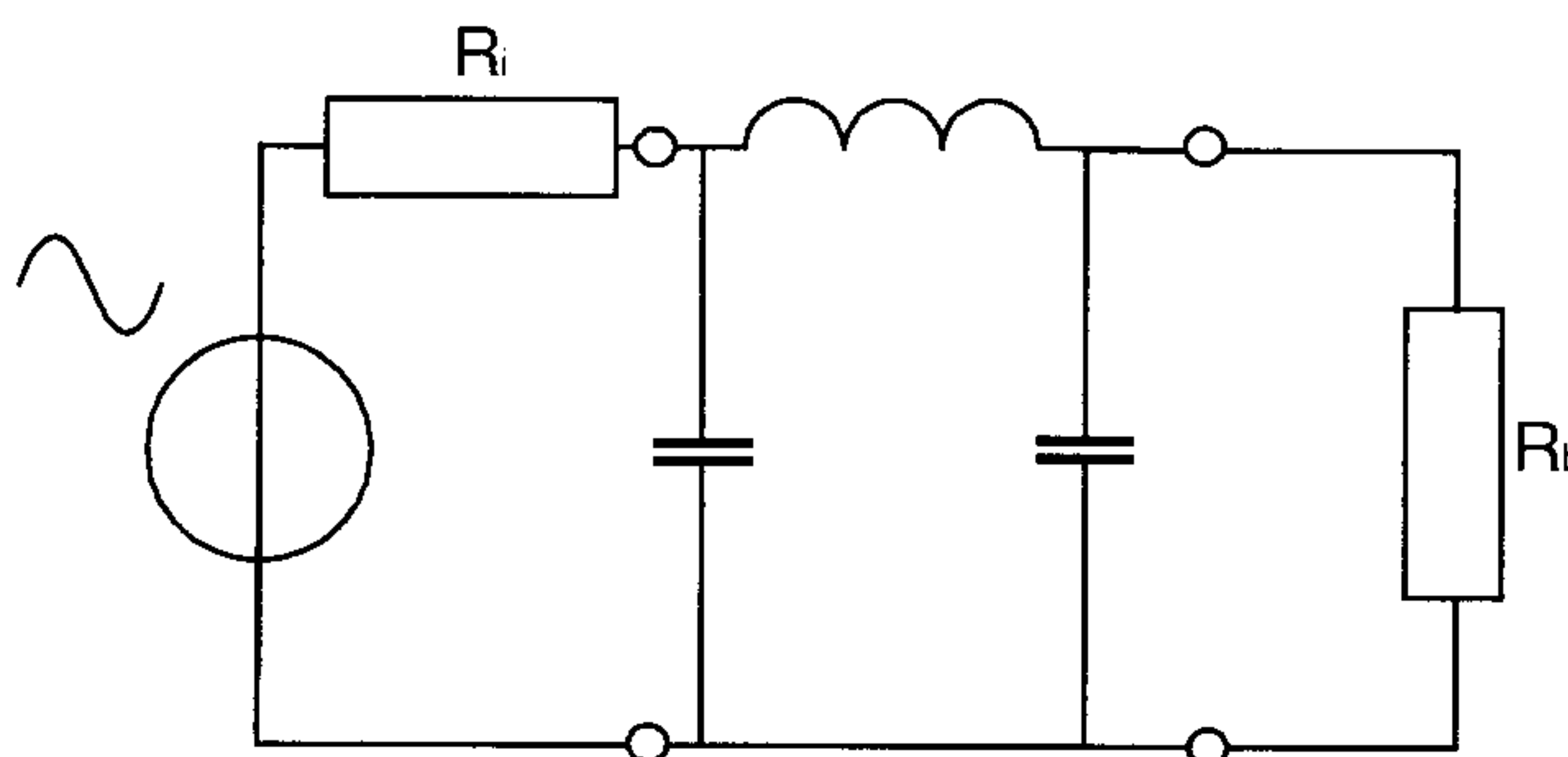
Verwissel in figuur 4.5-13a R en C en in figuur 4.5-13b R en L van plaats. Bepaal de karakteristiek van de nieuwe schakelingen.

Opdracht 11

Verwissel in figuur 4.5-13c de weerstand en de parallelkring en in figuur 4.5-13d weerstand en de seriekring van plaats. Bepaal de frequentie-karakteristiek van deze schakelingen.

Filters voor zendereindtrappen

De vermogenstransistor van een zendereindtrap produceert, behalve het gewenste signaal, heel wat harmonischen. Deze kunnen met een laagdoorlaatfilter onderdrukt worden. De schakeling van figuur 4.5-13a is daarvoor niet geschikt. Er zou veel vermogen verloren gaan in de serieweerstand en de verzwakking bij de tweede harmonische is lang niet voldoende (minder dan 6 dB). Door een combinatie van spoelen en condensatoren is wel voldoende harmonischen onderdrukking te bereiken en is het vermogensverlies te verwaarlozen.



Figuur 4 5-14 Laagdoorlaatfilter voor een zendereindtrap (π filter). In dit filter komen drie frequentie afhankelijke componenten voor. De onderdrukking van de hogere harmonischen is daardoor veel beter. Bovendien gaat in het filter zelf geen vermogen verloren.

Figuur 4.5-14 geeft een geschikte schakeling die, in verband met de vage gelijkenis met de Griekse letter π aangeduid wordt als pi-filter. Deze filters worden geconstrueerd voor een bron met een bepaalde inwendige weerstand en worden afgesloten met een bepaalde belastingsweerstand. Sturing met een ideale spanningsbron heeft dan niet veel zin (waarom niet?).

De belangrijkste onderwerpen uit dit hoofd stuk zijn kort samengevat in tabel 4.1. Bij de voorbereiding op het examen kunnen we er mee volstaan de formules met een sterretje uit het hoofd te leren. Toch is het verstandig om ook de afleiding te leren; dat kan ons helpen om een bepaalde formule te herinneren wanneer we die vergeten mochten zijn.

	Seriekring	Parallelkring
Resonantie frequentie	$f_{res} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ (*)	$f_{res} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ (*)
Z_{res} ideaal	nul	oneindig
Z_{res} praktisch	laagohmig (R _s)	hoogohmig (R _p)
Boven de resonantie	inductief	capacitief
Onder de resonantie	capacitief	inductief
Q-factor	$Q_s = \frac{2\pi fL}{R_s}$ (*) $Q_s = \frac{1}{2\pi fCR_s}$	$Q_p = \frac{R_p}{2\pi fL}$ (*) $Q_p = 2\pi fCR_p$
Bandbreedte B	$B_{\sqrt{2}} = \frac{f_{res}}{Q}$ (*)	$B_{\sqrt{2}} = \frac{f_{res}}{Q}$ (*)

Tabel 4.1 Overeenkomsten en verschillen bij de serie- en de parallelkring

4.6 Vragen

Vraag 1

Een sinusvormige spanning met een U_{max} van 10 Volt wordt aangesloten op een weerstand van 10 Ohm.

Het opgenomen vermogen is:

- A. 5 W
- B. 7,07 W
- C. 10 W
- D. 100 W

Vraag 2

De frequentie van een wisselspanning bedraagt 100 Hz.

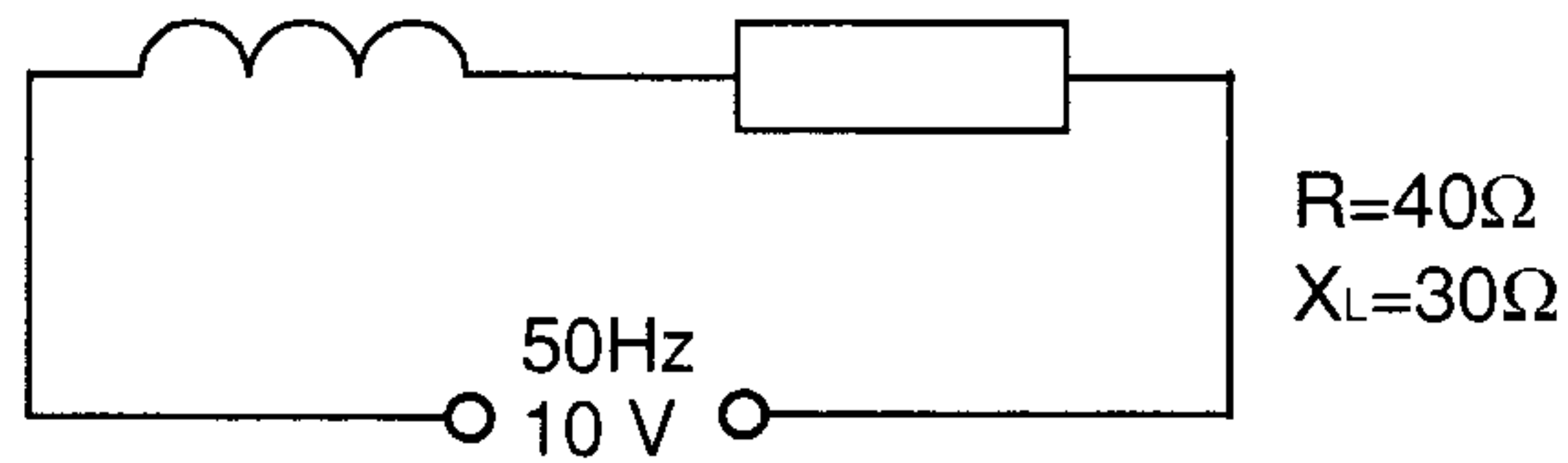
Het aantal perioden dat in 5 minuten ontstaat, bedraagt:

- A. 20
- B. 500
- C. 1200
- D. 30000

Vraag 3

Het in de schakeling gedissipeerde vermogen is:

- A. 1,4 W
- B. 1,6 W
- C. 2 W
- D. 2,5 W

**Vraag 4**

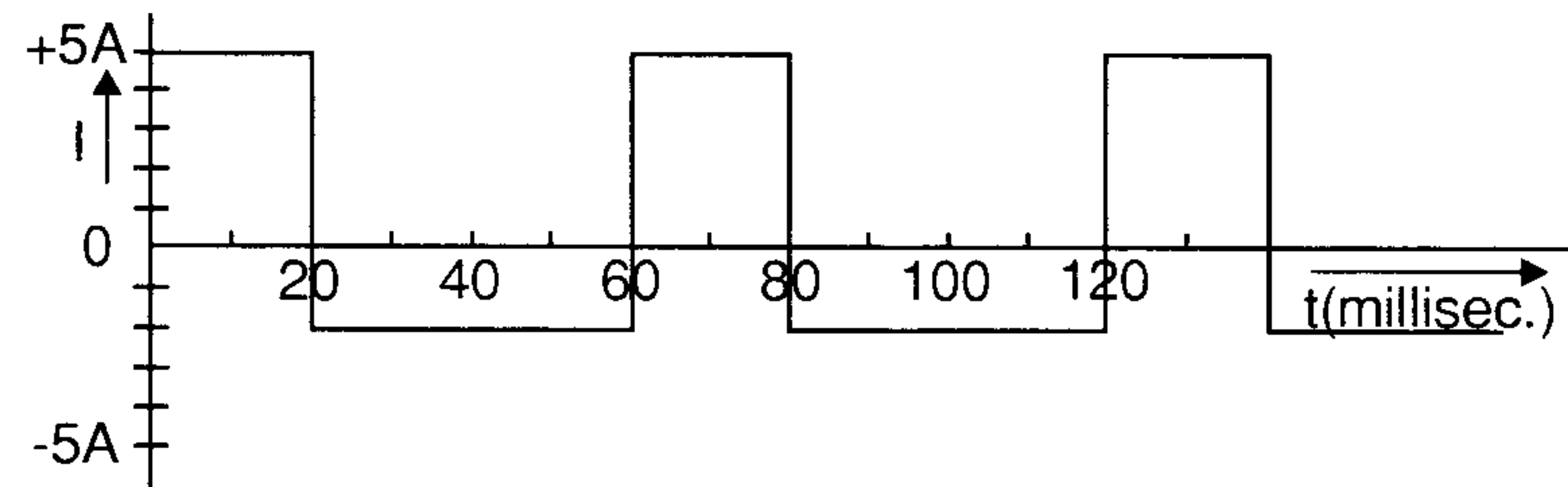
De wet van Ohm voor wisselstroom wordt door de volgende formule weergegeven,

(Z is hierin de impedantie):

- A. $Z = U \times I$
- B. $U = I \times Z$
- C. $I = Z : U$
- D. $Z = I : U$

Vraag 5

De gemiddelde waarde van de stroom is:



- A. 3 A
- B. 1,165 A
- C. 0,5 A
- D. 0,333 A

Vraag 6

Een spoel met een coëfficiënt van zelfinductie van 382 mH is aangesloten op een spanning van 260 Volt en neemt een stroom op van 2 Ampère.

De ohmse weerstand van deze spoel is ongeveer:

- A. 10 Ohm
- B. 50 Ohm
- C. 120 Ohm
- D. 130 Ohm

Vraag 7

Bij een condensator is het faseverschil tussen stroom en spanning:

- A. 0°
- B. 90°
- C. 180°
- D. afhankelijk van de frequentie